

Année 2021

N° d'ordre : (attribué par le SCD)

UNIVERSITÉ DE HAUTE-ALSACE
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE HAUTE-ALSACE**ECOLE DOCTORALE : Mathématiques, sciences de l'information et de l'ingénieur (ED 269)**

Discipline : Automatique

Présentée et soutenue publiquement

par

Jules MATZ

Le 9 décembre 2021

CONTRIBUTION À L'IDENTIFICATION ET AU RECALAGE DE PARAMÈTRES DE MODÈLES VÉHICULE : APPLICATION À LA CORRÉLATION NUMÉRIQUE/PHYSIQUE DANS UN ENVIRONNEMENT HIL.

Sous la direction du Prof. Michel BASSET

Jury : Prof. Dalil ICHALAL, Université d'Évry (Rapporteur)
Prof. Rachid MALTI, Université de Bordeaux (Rapporteur)
Prof. Marion GILSON-BAGREL, Université de Lorraine (Examinatrice)
Prof. Michel BASSET, Université de Haute-Alsace (Directeur de thèse)
Dr. Abderazik BIROUCHE, Université de Haute-Alsace (Encadrant)
Dr. Benjamin MOURLLION, Université de Haute-Alsace (Encadrant)
Dr. Fethi BOUZIANI, Stellantis (Encadrant industriel)

Remerciements

Cette thèse CIFRE a été réalisée en partenariat entre le constructeur automobile Stellantis (site de Belchamp) et l'Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal (IRIMAS) de l'Université de Haute-Alsace.

Le doctorat est un cheminement long et ardu, qui se parcourt principalement seul, mais ce sont tous les conseils, les échanges et le soutien que l'ont m'a apporté qui m'ont permis de mener la thèse dans de bonnes conditions, et d'en sortir grandi. Pour cela, je tiens à adresser mes remerciements à toutes celles et ceux qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur Michel Basset, directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordé et pour son soutien tout au long de la thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs les Professeurs Rachid Malti et Dalil Ichalal pour avoir rapporté ce manuscrit de thèse, et Madame le Professeur Marion Gilson-Bagrel pour avoir présidé le jury de thèse.

Je remercie Monsieur Fethi Bouziani, encadrant industriel, pour le savoir-faire qu'il m'a partagé, pour ses conseils, pour son implication, et pour avoir été à l'origine de ce projet de thèse passionnant.

Je remercie Messieurs Abderazik Birouche et Benjamin Mourllion, encadrants académiques, pour tout ce qu'ils m'ont apporté, depuis mon stage de master sous leur supervision il y a presque cinq ans, jusqu'au bout de cette thèse. Pour m'avoir éclairé sur bien des aspects de l'automatique, pour avoir cru en moi, pour toute l'aide apportée et pour m'avoir guidé jusqu'ici, je leur adresse mes plus sincères et chaleureux remerciements.

Je souhaite remercier également mes collègues de Belchamp, d'une part pour toutes les discussions enrichissantes sur la dynamique du véhicule, et d'autres part pour tous les bons moments partagés au bureau, autour d'un café, à table, ou en covoiturage. La liste serait bien longue, mais pour n'en citer que quelque-uns, merci à Lounis, Soichi, Hossni, Jérôme P., Nicolas M., Thomas O., Thibault, Jean-Nicola, Baya, Nicolas F., Mohamed...

Pareillement, j'adresse mes plus chaleureux remerciements à tous les membres de l'équipe MIAM pour la si bonne ambiance qui règne dans ce labo. C'est un plaisir de travailler dans une équipe avec autant de partage, d'entraide et de bonne humeur (Jonathan, Benjamin, vous y êtes pour quelque chose !). Enfin j'aimerais remercier tout particulièrement Corentin, Solenne et David pour les échanges passionnés que nous avons eu sur l'automatique, la mécanique, la dynamique du véhicule, pendant des soirées entières sur le tableau blanc du bureau MIAM3.

Finalement, je remercie mes amis et ma famille, pour m'avoir supporté et encouragé, et surtout pour m'avoir de temps à autre sorti de la thèse pour partager de bons moments ensemble.

À mon grand-père Jean Rauscher.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 Éléments sur la modélisation de la dynamique du véhicule	5
1.1 Introduction	5
1.2 Éléments du véhicule	6
1.3 Modélisation	9
1.4 Modèles de dynamique du véhicule	13
1.5 Modélisation du pneumatique	24
1.6 Conclusion	35
Chapitre 2 Estimation de paramètres	37
2.1 Introduction	38
2.2 Notions de théorie de l'information	39
2.3 Inférence statistique	41
2.4 Estimation de paramètres pour modèles statiques	48
2.5 Estimation de paramètres pour modèles dynamiques LTI	50
2.6 Estimation de paramètres pour modèles dynamiques non-linéaires	56
2.7 Identifiabilité	61
2.8 Algorithmes d'optimisation	66
2.9 Conclusion	71
Chapitre 3 Méthodes de recalage appliquées à des modèles de véhicules	73
3.1 Introduction	73
3.2 Identification directe du modèle pneu avec l'estimation de ses entrées-sorties . . .	74
3.3 Développement d'une méthode de pondération dans le cas de dynamiques inégalement excitées	78
3.4 Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures de l'état	84
3.5 Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures d'accélération latérale	88

3.6 Conclusion	91
Chapitre 4 Application au recalage de modèles véhicules pour la validation de l'ESC	93
4.1 Introduction	94
4.2 Contexte industriel	94
4.3 Système de contrôle de stabilité ESC	96
4.4 Essais et mesures	97
4.5 Modèle CarMaker et HIL	108
4.6 Régulation ESC pré-enregistrée	109
4.7 Paramétrage initial depuis la Flat-Trac	111
4.8 Cas de pressions différentes aux pneus avant et arrières	111
4.9 Étude d'identifiabilité	112
4.10 Limitations pour l'utilisation de l'algorithme EM	118
4.11 Minimisation de l'erreur de simulation sur les manœuvres de sinus dwell	120
4.12 Validation de la méthode fondée sur la minimisation de l'erreur de simulation	122
4.13 Conclusion	124
Conclusion générale	141
Bibliographie	143
Annexe A Modèle de pneumatique MF5.2	151
A.1 Introduction	151
A.2 Effort vertical et rayon de roulement effectif	151
A.3 Glissement et dérive	153
A.4 Effort longitudinal pur	153
A.5 Effort latéral pur	154
A.6 Moment d'auto-alignement pur	156
A.7 Effort longitudinal couplé	158
A.8 Effort latéral couplé	159
A.9 Moment d'auto-alignement couplé	160
A.10 Moment de renversement	161
A.11 Moment de roulement	161
A.12 Transitoire	161
Annexe B Estimation d'état par lissage	163
B.1 Filtrage et lissage	163
B.2 Filtrage et lissage gaussiens	164

B.3	Lissage de Rauch-Tung-Striebel unscented	166
B.4	Lissage de Rauch-Tung-Striebel cubature	166
Annexe C Étape M de l'algorithme EM		169
C.1	Présentation de l'étape de maximisation (M)	169
C.2	Évaluation de la borne inférieure	170

Table des figures

1	Schéma synthétique de la thèse et périmètres des chapitres.	3
2	Description du contenu des chapitres.	4
1.1	Principaux éléments à prendre en compte pour la modélisation de la dynamique du véhicule.	7
1.2	Géométrie du véhicule : b et l sont la voie et l'empattement du véhicule, G est le centre de masse du véhicule, δ_{fl} et δ_{fr} sont les angles de braquage des roues avant.	14
1.3	Repères intermédiaire R_I , véhicule R_V et roue $R_{W,FL}$ (définition [ISO91]).	14
1.4	Angles de lacet ψ , de tangage θ et de roulis ϕ (définition [ISO91]).	15
1.5	Modèle bicyclette. x est positif vers l'avant du véhicule et y est positif vers la gauche du véhicule.	15
1.6	Évolution des trajectoires dans l'espace d'état pour les modèles bicyclette linéaire et non-linéaire.	19
1.7	Effet Brouilhet au train arrière. Les efforts verticaux transmis par les bras de suspension (<i>jacking forces</i>) sont en rouge.	22
1.8	Cône de frottement. La force de réaction r du sol sur le solide se décompose en une composante tangentielle t et une composante normale n	25
1.9	Déformation des patins due à un couple freineur (la roue est ralentie).	26
1.10	Déformation des patins due à un couple moteur (la roue est accélérée).	26
1.11	Angle de dérive α , vitesse de déplacement v et projections v_x et v_y dans le repère roue.	27
1.12	Schéma de la déformation latérale des patins, vue de dessus.	27
1.13	Illustration des compromis d'un modèle [Pac06].	28
1.14	Schéma d'une roue avec des variables du modèle MF5.2. La roue est dans l'axe x et a un angle d'inclinaison γ autour de x	30
1.15	Allure de la courbe de l'équation (1.62) et interprétation des « macro-coefficients » [PB97].	31
1.16	Effort longitudinal en fonction de la dérive et du glissement pour différentes charges verticales (angle d'inclinaison nul).	32
1.17	Effort latéral en fonction de la dérive et du glissement pour différentes charges verticales (angle d'inclinaison nul).	32
1.18	Courbes d'iso-dérive pour $Fz = 4000$ N. L'enveloppe de ces courbes est la limite d'adhérence du pneumatique.	33
1.19	Rayon libre R_0 , Rayon effectif R_e et déformation due à la charge ρ	34

2.1	Méthodologie d'identification de systèmes. Lorsque le modèle échoue à l'étape de validation, les connaissances augmentent, ce qui mène ensuite à un choix plus pertinent des modèles candidats, du critère de qualité et des expériences à mener.	38
2.2	Illustration de l'estimateur MWLE.	50
2.3	Modèles linéaires courants.	51
2.4	Différents concepts d'erreur. Le type erreur d'équation est un cas particulier de l'erreur généralisée. Pour un modèle ARX, on a dans ce cas $M_1 = B(q)$ et $M_2^{-1} = A(q)$.	52
2.5	Schéma d'identification de modèle de type ARX.	53
2.6	Schéma d'identification de modèle de type OE.	54
2.7	Quatre optimisation des paramètres θ_1 et θ_2 du modèle $y = \min(\theta_1 x, \theta_2)$ avec la fonction <i>fminunc</i> de Matlab à partir d'initialisations différentes.	62
3.1	Schéma représentant le modèle de pneumatique comme un sous-modèle du modèle véhicule.	74
3.2	Structure similaire à l'erreur généralisée pour l'estimation des paramètres du modèle pneu.	75
3.3	Angle volant et vitesse longitudinale utilisés comme entrées du modèle bicyclette non-linéaire.	76
3.4	Dérives et forces latérales estimées à partir des mesures et de l'équation (3.6), et courbe caractéristique du modèle de pneu avec les paramétrages initial θ_0 et optimisés sur l'intervalle des dérivées estimées.	77
3.5	Simulations avec les paramètres identifiés, examinées en fonction du temps.	78
3.6	Simulations avec les paramètres identifiés, examinées dans l'espace d'état.	78
3.7	Angle volant et vitesse longitudinale pour la manœuvre de validation.	79
3.8	Simulations de validation avec les paramètres identifiés, examinés en fonction du temps.	79
3.9	Illustration de différentes techniques pour calculer la pondération. Les échantillons sont représentés par le symbole $\bullet$.	82
3.10	Pondération des échantillons en fonction du temps.	83
3.11	Filtrage et lissage avec l'état augmenté.	85
3.12	Allure des fonctions coût des différentes méthodes d'estimation étudiées. Le bleu correspond à des valeurs faibles, le jaune à des valeurs élevées.	86
3.13	Simulations en fonction du temps avec les paramètres identifiés.	87
3.14	Simulations dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.	87
3.15	Simulations de validation en fonction du temps avec les paramètres identifiés.	88
3.16	Simulations de validation dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.	88
3.17	Simulations en fonction du temps avec les paramètres identifiés.	90
3.18	Simulations dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.	90
3.19	Simulations de validation en fonction du temps avec les paramètres identifiés.	91
3.20	Simulations de validation dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.	91
4.1	Répartition des validations physique et HIL pour la manoeuvre sinus dwell e considérant les différentes déclinaisons d'un véhicule.	95
4.2	bloc du système ESC	96
4.3	Vues aériennes du centre technique de Belchamp.	97
4.4	Entrées (angle volant et vitesse) pour la manoeuvre de régime permanent.	98
4.5	Description de la manoeuvre de sinus dwell.	99

4.6	Vecteurs et repères utilisés dans les relations cinématiques des équations (4.8) à (4.14).	102
4.7	Positionnement des capteurs lasers de hauteur de caisse.	102
4.8	Identification des séquences de régime permanent.	105
4.9	Caractéristiques obtenues à partir des séquences de régime permanent.	105
4.10	Estimation des rigidités de dérive avant et arrière pour approximer au mieux les points calculés par la relation (4.40).	106
4.11	Critères de la régulation [ECE15] sur la vitesse de lacet et le déport latéral.	107
4.12	Banc <i>Hardware-In-the-Loop</i> utilisé à Stellantis.	109
4.13	Simulations en boucle ouverte et boucle fermée.	111
4.14	Machine de test des pneumatiques « Flat-Trac ». Photographie d'une Flat-Trac du site de Belchamp, parue dans l'Est Républicain le 19 décembre 2018.	112
4.15	Exemple de manœuvre de sinus dwell et erreurs faites par la prédiction pour une amplitude maximum d'angle volant de 270 degrés, à droite.	116
4.16	Fonctions de sensibilité pour l'étude de l'influence des paramètres dans le temps, pour une manœuvre de sinus à une amplitude de -151 degrés.	117
4.17	Estimation des vitesses des roues par filtrage et lissage pour les sinus dwell à -83 (freinage ESC très faible, les vitesses restent élevées) et -270 degrés (freinage ESC fort, les vitesses diminuent).	119
4.18	Estimation des paramètres PKY1, PKY2 et PDY1 à partir des sinus dwell à ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179, 193, ± 270 degrés.	120
4.19	Estimation des paramètres PKX1 et PDX1 à partir des sinus dwell à ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179, 193, ± 270 degrés.	120
4.20	Étapes du processus de recalage des paramètres.	121
4.21	Manœuvre de sinus dwell à -110 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	125
4.22	Manœuvre de sinus dwell à -179 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	126
4.23	Manœuvre de sinus dwell à -270 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	127
4.24	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -41 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	130
4.25	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -165 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	131
4.26	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -234 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.	132
4.27	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -110 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	135
4.28	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +151 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	136
4.29	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -165 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	137

4.30	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +220 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	138
4.31	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -261 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	139
4.32	Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +270 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.	140
A.1	variables principales du modèles MF5.2.	152
A.2	Rayon libre R_0 , Rayon effectif R_e , déformation due à la charge ρ et vitesse au centre roue V_x	152

Introduction

Contexte de l'étude

La simulation numérique est de plus en plus utilisée en industrie : d'une part le développement du numérique permet d'avoir une forte puissance de calcul et, d'autre part, l'automatique sait tirer avantage de cette puissance de calcul en utilisant des modèles toujours plus complexes. Cette complexité implique un travail de plus en plus poussé pour concevoir, étudier, paramétrer et utiliser ces modèles. L'augmentation de la complexité de ces modèles est particulièrement notable dans l'industrie automobile. Les premiers modèles de dynamique du véhicule permettant d'analyser sa stabilité remontent aux années 1950 avec des modèles linéaires à deux ou trois degrés de liberté [Seg57]. De nos jours, des modèles non-linéaires très détaillés à plusieurs dizaines de degrés de liberté sont utilisés, implémentés dans des logiciels dédiés. Ces modèles comprennent ainsi un nombre très important de paramètres qui sont généralement identifiés en réalisant des tests spécifiques sur les différents sous-systèmes du véhicule. Toutefois, pour obtenir un modèle complet représentatif du comportement du véhicule réel, il est souvent nécessaire de recalibrer des paramètres à partir de mesures embarquées, effectuées lors d'essais sur piste.

L'automatique, en parallèle de son utilisation dans les phases de développement des véhicules, s'est également imposée au sein du véhicule lui-même, en particulier au travers des différents calculateurs embarqués (*Electronic Control Unit*, ECU). Le système de contrôle de stabilité (*Electronic Stability Control*, ESC) est un de ces calculateurs. Il intègre plusieurs fonctions pour améliorer la manœuvrabilité du véhicule lors de situations dangereuses, comme par exemple lors de freinages avec une adhérence faible, lors d'évitements d'obstacles brusques, etc. Ce système, qui comprend plusieurs capteurs lui permettant d'estimer la dynamique du véhicule, agit en ajustant indépendamment les pressions aux freins des quatre roues du véhicule en temps réel. D'ailleurs, il est obligatoire sur les véhicules vendus en Europe depuis 2014. En effet, il participe à la sécurité active du véhicule et permet d'éviter ou de modérer les conséquences d'une partie des accidents de la route.

Cette thèse CIFRE s'inscrit dans l'activité de développement et de validation du système ESC. Elle est faite en partenariat entre le constructeur automobile Stellantis (ex-PSA) et l'équipe MIAM (Modélisation et Identification en Automatique et Mécanique) de l'IRIMAS (Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal) à l'Université de Haute-Alsace. Afin de tester et valider les différentes fonctions de l'ESC, des bancs de test *Hardware-In-the-Loop* (HIL) sont utilisés. Sur ces bancs de test, la carte électronique de l'ESC est immergée dans une simulation haute fidélité d'un modèle de véhicule, et des scénarios sont joués afin de tester les performances de l'ESC. Pour que les tests sur bancs HIL soient représentatifs des manœuvres réelles où l'ESC s'active lors de situations d'instabilité, le modèle du véhicule doit être une très bonne approximation du comportement du véhicule réel. En général, le paramétrage initial du modèle s'avère insuffisant, et une étape de recalage de certains paramètres du modèle est alors nécessaire.

Objectifs de la thèse

Le volet académique de la thèse est l'étude des méthodes d'identification de paramètres pouvant s'appliquer à des modèles dynamiques non-linéaires. Du point de vue pratique, nous considérons les problématiques soulevées par l'estimation de paramètres pour des modèles de dynamique latérale du véhicule lors de fortes sollicitations.

Du point de vue industriel, l'objectif est de recalibrer les paramètres du modèle de pneumatique d'un modèle détaillé de dynamique du véhicule. En effet, c'est sur ces paramètres que subsiste la plus grande incertitude, et ce sont des paramètres très influents sur le comportement du véhicule. Le modèle est ensuite utilisé dans un simulateur temps réel, couplé à un ESC sur banc HIL. L'objectif est d'obtenir des résultats sur bancs de test HIL qui soient suffisamment proches de ceux obtenus en essai physique sur piste pour des manœuvres de type « sinus dwell ». Ces manœuvres sollicitent fortement le comportement latéral du véhicule et sont semblables à une situation d'évitement. D'ailleurs, ce sont des manœuvres réalisées dans le cadre de l'homologation du véhicule.

Le recalage des paramètres est actuellement réalisé de façon empirique par un ingénieur expert en dynamique du véhicule et modélisation du pneumatique. Il ajuste itérativement les paramètres en s'appuyant sur une procédure, son expérience et ses connaissances. Cette étape est longue et peut durer plusieurs semaines, voire quelques mois selon les projets.

L'objectif de la thèse est de développer des outils d'aide pour recalibrer de façon automatique les paramètres du modèle, afin de considérablement réduire le temps pour obtenir un modèle représentatif. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la dynamique du véhicule, et tout particulièrement la modélisation du pneumatique. Le modèle de pneu utilisé est un modèle empirique comprenant un grand nombre de paramètres ; il faudra donc sélectionner un ensemble restreint de paramètres à ajuster.

Contributions

Les contributions apportées par cette thèse sont résumées ci-après :

- Une étude et une comparaison de différentes méthodes d'estimation de paramètres est proposée, pour le cas pratique de l'estimation des paramètres du modèle de pneu d'un modèle de dynamique du véhicule à deux degrés de libertés.
- Le problème d'estimation de paramètres pour des modèles de dynamique du véhicule se caractérise d'une part par des modèles généralement insuffisamment détaillés pour être vraiment réalistes, et, d'autre part, par des mesures excitant inégalement les différents points de fonctionnements. Ceci nous mène à proposer une approche cherchant à approximer de façon uniforme les différentes dynamiques en pondérant les échantillons dans les méthodes d'estimation. Il s'ensuit le développement d'une variante de la méthode d'erreur de prédiction et de l'algorithme EM.
- Afin de s'affranchir des contraintes liées à l'utilisation des bancs HIL pour l'estimation de paramètres, nous proposons une nouvelle démarche qui utilise les pressions de freins enregistrées lors des essais physiques comme des entrées du modèle numérique. Les paramètres du modèle de véhicule sont alors optimisés sans avoir d'ESC en rétroaction sur le modèle, mais en lui substituant les pressions de freins issues des mesures, et en comparant les sorties du modèle avec les signaux de dynamique du véhicule mesurés lors des essais.
- Des outils sont développés, implémentés dans le logiciel Matlab et utilisant le logiciel de simulation IPG CarMaker, afin d'être utilisés au sein de l'équipe « SYStèmes Complexes » (SYSC) du département de liaison au sol de Stellantis pour l'ajustement des paramètres de façon automatisée. Notamment, une méthode originale est proposée et implémentée pour

analyser l'influence des paramètres du modèle de pneu sur le comportement du véhicule. Cette méthode permet la sélection d'un ensemble restreint de paramètres à identifier. Elle permet également d'effectuer une analyse de sensibilité de la dynamique du véhicule par rapport aux paramètres du modèle de pneu, au cours du temps dans une manœuvre.

Organisation du manuscrit

Le sujet de la thèse est synthétisé en figure 1, où sont représentés tous les éléments principaux étudiés dans la thèse, ainsi que leurs connexions dans le cadre du problème d'identification.

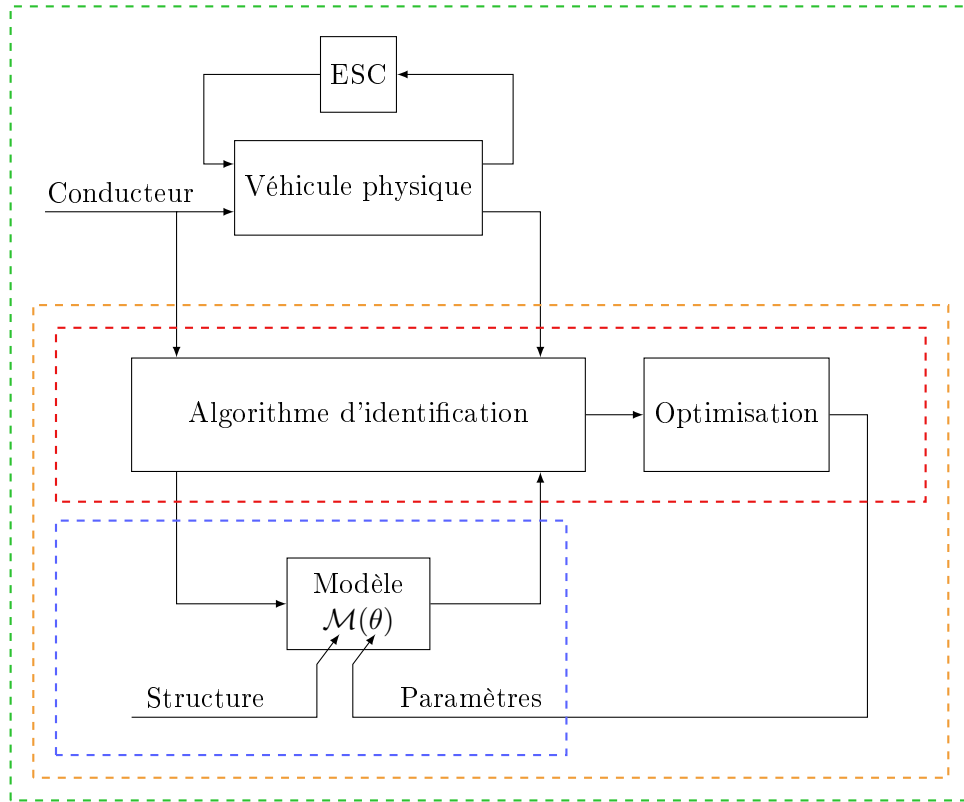


FIGURE 1 – Schéma synthétique de la thèse et périmètres des chapitres.

En figure 1, les cadres pointillés délimitent les périmètres des sujets abordés dans chacun des chapitres, leurs couleurs correspondent aux blocs de description des chapitres en figure 2.

L'organisation du manuscrit se présente donc comme suit :

Chapitre 1. Les sous-systèmes composant un véhicule sont présentés. Les types de modélisation et la construction de modèles sont discutés. Puis, plusieurs modèles de dynamique du véhicule sont présentés, qui seront amenés à être utilisés dans les chapitres suivants. Finalement, la modélisation du pneumatique est abordée ; une partie est présentée en annexe A.

Chapitre 2. Les méthodes retenues d'estimation de paramètres sont étudiées, pour des modèles de complexité croissante. Le problème de l'estimation des paramètres d'une distribution est présenté, suivi de celui de l'estimation des paramètres d'une fonction statique, puis d'un modèle dynamique linéaire, et enfin d'un modèle dynamique non-linéaire. Finalement, ce chapitre aborde la question de l'identifiabilité des paramètres. Une partie des

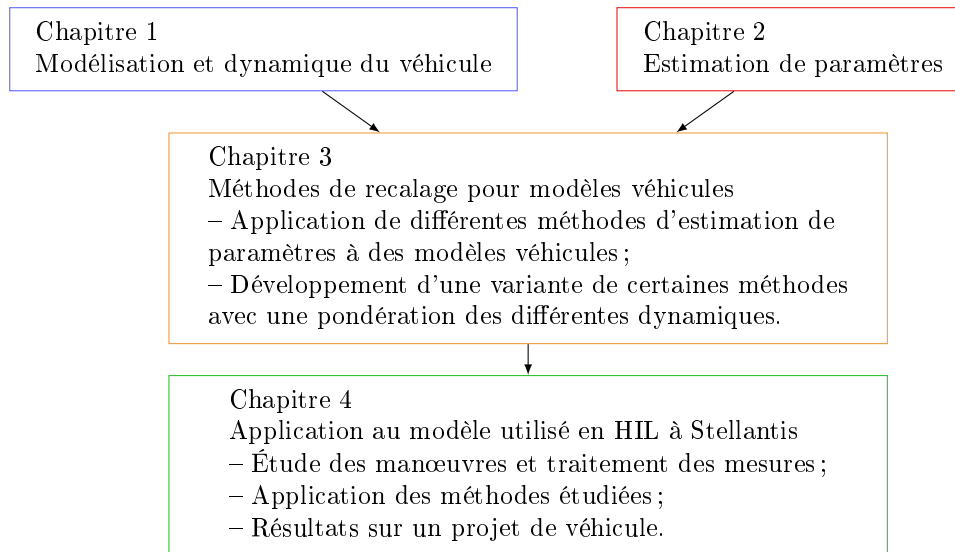


FIGURE 2 – Description du contenu des chapitres.

développements permettant de comprendre certaines méthodes d’estimation sont reportés en annexes B et C.

Chapitre 3. Une adaptation des méthodes d’erreur de prédiction et de l’algorithme Espérance-Maximisation est proposée, pour tenir compte du cas où les mesures excitent inégalement les dynamiques du système. Les différentes méthodes d’estimation de paramètres vues au chapitre 2 et les méthodes développées sont comparées sur un modèle non-linéaire simple de dynamique du véhicule : le modèle bicyclette. Trois cas de figure sont traités : en supposant d’abord tous les signaux nécessaires disponibles, puis en supposant que seules les variables d’état sont disponibles, et enfin en considérant uniquement que la variable d’accélération latérale est disponible.

Chapitre 4. Dans ce chapitre, le problème industriel est traité, et certains des outils développés précédemment sont appliqués au recalage du modèle utilisé en HIL. Une nouvelle approche est proposée, qui utilise les pressions de freins comme des entrées du modèle, afin de s’affranchir de l’environnement HIL pour l’étape de recalage. L’implémentation adoptée pour le recalage est expliquée et les résultats obtenus sont donnés en fin de chapitre.

Conférences internationales avec comité de lecture

- Jules Matz, Abderazik Birouche, Benjamin Mourllion, Fethi Bouziani et Michel Basset. Parameter identification for nonlinear models from a state-space approach. À *IFAC World Congress*, Berlin, 2020.
- Jules Matz, Abderazik Birouche, Benjamin Mourllion, Fethi Bouziani et Michel Basset. Weighted expectation-maximisation algorithm for parameter estimation of misspecified dynamical models : application to vehicle dynamics. À *Modeling, Estimation and Control Conference*, Austin, 2021.

Éléments sur la modélisation de la dynamique du véhicule

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Éléments du véhicule	6
1.2.1	Conducteur	7
1.2.2	Direction	7
1.2.3	Système de freinage	8
1.2.4	Groupe motopropulseur	8
1.2.5	Roues	8
1.2.6	Suspensions	8
1.2.7	Caisse	9
1.2.8	Effets aérodynamiques	9
1.3	Modélisation	9
1.3.1	Notion de modèle	10
1.3.2	Classification en boîtes blanches-noires-grises	11
1.3.3	Classification des différentes méthodes d'obtention de boîtes grises	12
1.3.4	Construction d'un modèle en tant que compromis	13
1.4	Modèles de dynamique du véhicule	13
1.4.1	Modèle bicyclette	15
1.4.2	Modèles 4 roues	20
1.4.3	Modèles complexes	23
1.5	Modélisation du pneumatique	24
1.5.1	Phénomènes physiques macroscopiques	24
1.5.2	Modèles de pneumatique	28
1.6	Conclusion	35

1.1 Introduction

La dynamique du véhicule vise à comprendre le comportement du véhicule en s'appuyant sur des lois physiques. Dans cette thèse, nous considérons uniquement le cas de véhicules automobiles. L'étude du comportement du véhicule, la synthèse de contrôleurs, d'estimateurs et la

construction de simulateurs se basent sur des modèles. Il existe de nombreux modèles de véhicules, ils peuvent être simples (modèles linéaires avec peu de degrés de liberté) ou complexes (modèles multicorps avec un nombre important de degrés de liberté). Ces modèles ont un sens physique plus ou moins prononcé (boîte blanche, grise, noire) et sont construits pour répondre à certaines contraintes (exécution en temps réel, utilisation dans une loi de commande, etc.). En se basant sur certains de ces modèles, des lois de commande sont synthétisées. Elles sont implémentées dans des calculateurs embarqués et permettent un contrôle du véhicule plus aisé et plus sécuritaire au travers du « contrôle global châssis » avec les aides à la conduite (*Advanced Drivers-Assistance Systems*, ADAS) et les systèmes de sécurité active de type correcteur électronique de trajectoire (*Electronic Stability Control*, ESC ou *Electronic Stability Program*, ESP). En phase de conception et de développement du véhicule, les modèles sont un outil utile pour étudier le comportement du véhicule et réduire les coûts et le temps de développement.

Dans la dynamique du véhicule, on peut distinguer les dynamiques longitudinale, latérale et verticale. Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement à la dynamique latérale du véhicule lors de fortes sollicitations, puisque la finalité de notre travail est la simulation de manœuvres conduisant à des régulations de l'ESC. Toutefois, pour amener des notions importantes de dynamique du véhicule, il est également intéressant d'étudier la dynamique latérale lors de faibles sollicitations. Tandis qu'un modèle détaillé permet une meilleure approximation de la réalité, notamment pour de fortes sollicitations, un modèle simple permet d'analyser plus facilement certaines caractéristiques ayant une interprétation enrichissante (stabilité, tendance au survirage, etc).

Ce chapitre introduit d'abord les éléments à prendre en compte lors de l'étude de la dynamique du véhicule. Ensuite, la problématique de la modélisation d'un système est abordée, avec une discussion sur l'aspect boîte blanche-grise-noire d'un modèle. Puis différents modèles de dynamique du véhicule sont présentés, ainsi que certains concepts fondamentaux. Enfin, la modélisation du pneumatique est étudiée, en particulier le modèle *Magic Formula 5.2* (MF5.2) très répandu dans l'industrie automobile.

1.2 Éléments du véhicule

Les éléments principaux à prendre en compte pour étudier la dynamique du véhicule sont représentés en FIGURE 1.1. L'influence de l'environnement sur le véhicule se traduit par l'interaction entre les pneus et la route, les effets aérodynamiques agissant sur la caisse et la pesanteur agissant sur la masse suspendue (caisse) et les masses non-suspendues (roues et porte-fusées). Le conducteur peut être vu comme une action extérieure si l'on cherche à isoler uniquement le véhicule pour étudier ses caractéristiques, ou il peut être considéré comme faisant partie du véhicule et être modélisé. De façon très simplifiée, le conducteur contrôle et corrige la trajectoire du véhicule sur la route en agissant sur le volant (système de direction), et les pédales (système de freinage et Groupe MotoPropulseur, GMP). Ces organes agissent sur les roues du véhicule qui, en raison de leur interaction avec la chaussée, génèrent des efforts qui modifient la trajectoire du véhicule.

Selon que l'on étudie la dynamique verticale, longitudinale ou latérale, ou des combinaisons de celles-ci, on concentrera l'étude sur certains éléments plus que sur d'autres.

Différents éléments représentés en figure 1.1 sont décrits dans les prochaines sous-sections.

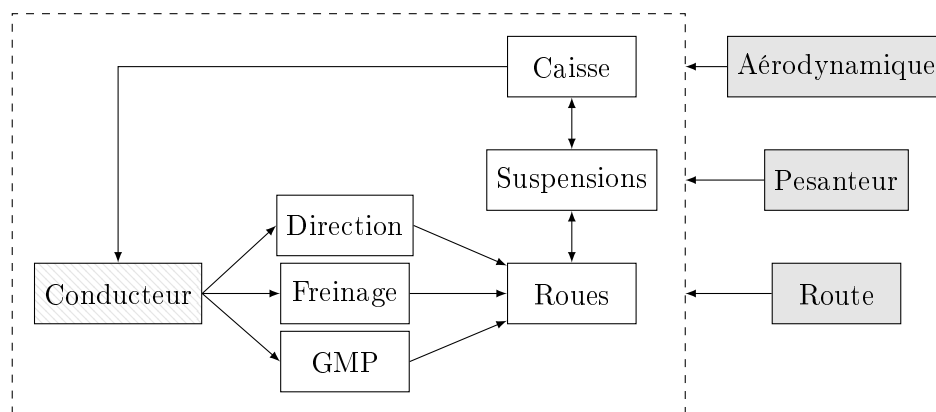


FIGURE 1.1 – Principaux éléments à prendre en compte pour la modélisation de la dynamique du véhicule.

1.2.1 Conducteur

Le comportement final du véhicule est grandement dépendant du conducteur. Celui-ci constitue une boucle de rétroaction : il agit comme un contrôleur à partir de ce qu'il perçoit (vision de la route, forces perçues au travers du siège et du volant, accélérations perçue par l'oreille interne, afficheur de vitesse et régime moteur, etc.) pour manœuvrer le volant, appuyer sur les pédales et changer les rapports de boîte de vitesses. En plus de cette boucle de rétroaction principale qu'est le conducteur, il en existe d'autres, comme par exemple celle que fait le correcteur électronique de trajectoire en agissant sur les pressions de freins aux quatre roues du véhicule afin d'aider le conducteur lors de situations dangereuses. Ces boucles de rétroactions ne sont pas étudiées ici, seul le véhicule (sans ESC) est étudié. En termes de théorie du contrôle, nous étudions donc uniquement le système à contrôler (*plant* en anglais).

1.2.2 Direction

La direction permet de contrôler l'orientation des roues en agissant sur le volant. La colonne de direction transmet la rotation du volant jusqu'à un pignon qui transforme ce mouvement en translation de la crémaillère. Cette dernière, en se déplaçant, actionne des biellettes qui changent l'orientation des porte-fusées et donc des roues. L'influence du déplacement de la crémaillère sur les roues est généralement prise en compte dans la modélisation des suspensions (qui définit l'orientation des roues en fonction des débattements de suspension et de la position de la crémaillère). Le déplacement de la crémaillère en fonction du déplacement de l'angle volant peut être obtenu en utilisant une fonction simple, linéaire ou non, ou à travers une table de correspondance. Cette relation est plus ou moins compliquée puisque la direction peut être composée de plusieurs articulations non homocinétiques [Hal95] et que la crémaillère peut être à pas variable [Bro06]. Il est également possible de prendre comme entrée d'un modèle non pas l'angle volant mais le couple au volant, en considérant alors la déformation et la rigidité de la colonne de direction. Dans ce cas, il faut de plus modéliser l'assistance de direction (généralement un moteur électrique sur la colonne de direction ou en prise sur la crémaillère à travers un autre pignon).

1.2.3 Système de freinage

Un système de freinage basique serait une pédale actionnant le piston du maître-cylindre, poussant le liquide de frein à se déplacer dans les canalisations, et à pousser à son tour les pistons des étriers de frein, mettant en contact les plaquettes de frein sur les disques de frein.

Dans les véhicules modernes, le système de freinage est plus complexe, puisqu'il comporte un amplificateur (*booster*), deux circuits de freins séparés et un contrôleur ESC. Le contrôleur ESC comprend des électrovannes et un moteur actionnant une pompe dans chaque circuit. L'amplificateur permet d'amplifier la force appliquée sur la pédale de freinage pour que l'action de freiner ne requiert pas une force trop importante de la part du conducteur. La séparation en deux circuits hydrauliques est faite pour des raisons de sécurité : si un circuit est endommagé et fuit, le véhicule peut toujours freiner. Enfin, l'ESC permet des aides à la conduite et peut freiner séparément les quatre roues afin d'assister le conducteur, par exemple pour contrôler la trajectoire du véhicule lors de situations d'évitement ou pour éviter de bloquer les roues sur une route avec faible adhérence.

1.2.4 Groupe motopropulseur

Le groupe motopropulseur permet d'entraîner les roues au travers de la chaîne de traction (arbre, embrayage, boîte de vitesse, différentiel). Il permet d'obtenir une énergie mécanique à partir de batteries électriques ou de la combustion d'essence. Le conducteur contrôle la puissance fournie en agissant sur la pédale d'accélération, d'embrayage et les rapports de boîte de vitesse. Les équations permettant de décrire le groupe motopropulseur sont obtenues en appliquant le principe fondamental de la dynamique en rotation tout au long de la chaîne de traction [RG18]. Le moteur peut être modélisé simplement, à partir de tables de correspondance décrivant la relation entre vitesse de rotation et couple du moteur à combustion, ou en utilisant les équations électromécaniques des machines électriques.

1.2.5 Roues

Par l'appellation simplifiée « roues » en figure 1.1, nous entendons l'ensemble des porte-fusées, jantes et pneumatiques. Les roues transmettent les efforts générés par le groupe motopropulseur et par le système de freinage au sol, ce qui permet d'accélérer et freiner le véhicule. De plus, lorsque le système de direction oriente les roues dans une direction différente de la trajectoire du véhicule, les pneumatiques se déforment et génèrent une force latérale qui permet de faire tourner le véhicule.

1.2.6 Suspensions

Une suspension comprend des éléments d'amortissement (amortisseurs), des éléments élastiques (ressorts), et des éléments solides. Tandis que les amortisseurs dissipent de l'énergie et que les ressorts absorbent et restituent de l'énergie, les éléments solides guident la trajectoire et l'orientation de la roue par rapport au châssis et transmettent une part des efforts de la roue vers la caisse. Toutefois, cette représentation est simplificatrice puisque, de plus en plus, les composants sont conçus pour remplir plusieurs fonctions. Ainsi, les amortisseurs et ressorts peuvent servir en partie à guider la roue, et les éléments habituellement solides peuvent comprendre des paliers en caoutchouc permettant une certaine déflexion sous effort. La suspension du véhicule assure plusieurs fonctions [Hal95] :

- filtration des vibrations dues au contact avec la chaussée ;

- placement de la roue dans une bonne configuration pour tirer le meilleur du contact entre le pneu et la chaussée, pour obtenir une bonne conduite du véhicule ;
- durabilité dans le temps pour un usage normal et un nombre restreint d’usages excessifs ;
- déformation à l’impact permettant une bonne absorption de l’énergie ; des éléments peuvent être affaiblis pour servir de fusibles et protéger des éléments plus coûteux ;
- compatibilité avec l’ensemble des autres composants du véhicule (système de freinage, d’échappement, répartition du poids, etc.).

Ajouté à ces objectifs de performance, il y a des contraintes de coût et de faisabilité. Puisqu’une architecture de suspension est le résultat d’un compromis entre tous ces besoins, il existe une variété d’architectures possibles [Hal95, Jaz17, BH04].

La suspension est donc un système complexe dont le comportement est dû à la fois à la cinématique des articulations et à la déformation des éléments (barre anti-roulis, barres de torsions, ressort, amortisseur, éléments en caoutchouc). Toutefois, l’étude et la modélisation de la suspension peuvent se faire en étudiant simplement les relations globales liant des efforts et un nombre restreint de variables cinématiques (déplacements longitudinal et latéral, angles de carrossage, de pince et d’enroulement) au débattement et à la vitesse de débattement de la suspension, à la position de la crémaillère (pour les suspensions avant) et au débattement de la suspension opposée.

La modélisation de la suspension peut se faire de différentes façons : soit en approximant ces relations globales par des équations simples ou des tables de correspondance, soit en modélisant tous les éléments de suspension dans une approche multicorps.

1.2.7 Caisse

La caisse est la partie suspendue du véhicule. Sa forme va influencer sur les forces aérodynamiques qu’elle subit, tandis que sa masse et ses moments d’inertie influent sa dynamique verticale, longitudinale et latérale. C’est dans la caisse que se placent les passagers et les chargements, d’où l’objectif de la suspension de filtrer les vibrations transmises à la caisse.

1.2.8 Effets aérodynamiques

L’écoulement d’air autour du véhicule crée des différences de pression autour de ce dernier, qui résultent en l’apparence de forces aérodynamiques. À vitesse élevée, les effets aérodynamiques affectent considérablement le comportement du véhicule. Les forces aérodynamiques sont généralement modélisées comme des fonctions de la géométrie de la caisse, de l’angle d’incidence du vent et du carré de la vitesse relative entre l’air environnant et la caisse. Par exemple, pour la force aérodynamique selon l’axe longitudinal du véhicule, on a

$$F_{x_{aero}} = -\frac{\rho}{2} C_x A v^2, \quad (1.1)$$

avec ρ la densité de l’air, C_x un coefficient adimensionnel et v la vitesse relative du vent par rapport au véhicule.

1.3 Modélisation

Dans cette section, la notion de modèle est définie, et différentes formulations de modèles dynamiques sont données. Ensuite, certains aspects de la construction d’un modèle sont discutés, comme le caractère physique ou non d’un modèle, et le compromis qui est fait entre la cohérence

physique, la corrélation avec l'expérience, la charge de calcul et la facilité de paramétrage. L'aspect « identification » de la construction d'un modèle n'est pas abordé ici ; il est étudié dans le second chapitre de cette thèse.

1.3.1 Notion de modèle

Un modèle est une idéalisation d'un phénomène. Comme expliqué par [PW97], un modèle peut être vu comme une loi d'exclusion distinguant ce qui peut se produire de ce qui ne le peut pas. Cela se traduit mathématiquement par l'idée qu'un modèle sélectionne une partie de l'univers des possibles. Dans [PW97], les auteurs définissent cet ensemble comme étant le comportement (*behavior*) du modèle. Ils définissent ensuite les « équations comportementales » (*behavioral equations*) comme les équations mathématiques du modèle décrivant le phénomène, ainsi que les variables manifestes et latentes. Les variables manifestes sont les variables de premier plan (par exemple les entrées et sorties d'un modèle), tandis que les variables latentes sont des variables auxiliaires ou intermédiaires, qui sont utiles à la formulation du modèle (par exemple les états d'un modèle dynamique). Cette notion de variables latentes se retrouve également dans l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) présenté au chapitre 2. Dans le cas de systèmes dynamiques, le modèle contraint la façon dont les variables manifestes et latentes évoluent dans le temps. Le comportement du modèle dynamique est, dans ce cas, l'ensemble des signaux compatibles avec les équations du modèle.

Concrètement, un modèle est le résultat de l'association d'une structure et de paramètres. La structure est l'ensemble des relations mathématiques entre les variables, tandis que les paramètres sont les valeurs données aux variables qui ne sont pas des degrés de liberté, des entrées ou des sorties.

Les modèles dynamiques peuvent généralement s'écrire sous forme de représentation d'état

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.2)$$

$$y = h(x, u) \quad (1.3)$$

où la variable d'état x est la variable latente qui décrit complètement l'état du modèle à un instant donné. Les composantes du vecteur x sont les degrés de liberté du modèle. L'histoire de l'évolution de x dans le temps est appelée la trajectoire d'état. Les variables manifestes u et y sont les entrées et sorties du modèle. Les fonctions f et h sont appelées les équations d'état et de mesure, ces équations décrivent la structure du modèle et font intervenir ses paramètres. Les variables u, x, y qui sont les vecteurs d'entrée, d'état et de sortie sont des fonctions du temps.

Un cas particulier est celui des modèles dynamiques LTI (*Linear Time-Invariant*, linéaire et invariant dans le temps) qui permettent de modéliser des phénomènes dans de nombreux domaines d'application et offrent un cadre de travail assez complet pour l'étude de leurs propriétés structurelles (stabilité, commandabilité, observabilité, etc.) et la synthèse avancée de lois de commande et d'estimateurs. Il existe une littérature abondante traitant de la théorie et des outils afférents aux systèmes LTI, par exemple les livres [Rug93, SP07, Lju99, Ant05].

Un modèle LTI peut être représenté en temps continu sous forme de représentation d'état,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1.5)$$

La représentation d'état d'un modèle n'est pas unique, elle dépend du choix des variables d'état. De ce fait, il existe une infinité de changements de base $\tilde{x} = Tx$ (T la matrice de changement de

base, inversible) qui permettent de représenter le système par des matrices A, B, C différentes, tout en maintenant le même comportement entrée-sortie.

Un modèle LTI peut également être représenté sous forme de fonction de transfert,

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \underbrace{\{C(sI - A)^{-1}B + D\}}_{G(s)}U(s) \quad (1.6)$$

$$G(s) = C \frac{\text{com}(sI - A)^\top}{\det(sI - A)} B + D = \frac{N(s)}{d(s)}, \quad (1.7)$$

avec s la variable de Laplace.

1.3.2 Classification en boîtes blanches-noires-grises

Un modèle, ou des parties d'un modèle, peuvent être classées selon leur aspect « boîte blanche », « boîte noire » ou « boîte grise ». Ces qualificatifs sont relatifs au contexte dans lequel est utilisé le modèle : modéliser un ressort par sa caractéristique force-élongation sera tantôt vu comme une approche boîte blanche (pour un ressort au sein d'un modèle multicorps) ou comme une approche boîte noire (si le modèle cherche uniquement à représenter le ressort ; une approche boîte blanche permettant une interprétation physique aurait utilisé la théorie de la résistance des matériaux en faisant intervenir les qualités du matériau, la géométrie du ressort, le nombre de spires, etc.).

Les qualificatifs de « boîte blanche », « boîte noire » ou « boîte grise » sont expliqués ci-dessous. Bien qu'ils soient relatifs à l'application considérée, ils permettent de saisir comment est construit un modèle selon les contraintes auxquelles il doit répondre.

Boîte blanche

La modélisation de type « boîte blanche » consiste à construire un modèle en s'appuyant sur les équations de la physique et sur notre compréhension du système. Le modèle ainsi créé permet d'avoir des résultats cohérents, y compris s'il est utilisé pour des entrées ou des états – des points de fonctionnement – différents de ceux utilisés pour construire le modèle. Cette approche est difficile à mettre en œuvre pour des systèmes qui sont complexes quantitativement (nombreux composants et sous-systèmes en interactions) ou qualitativement (phénomènes physiques difficiles à décrire). Les modèles ainsi obtenus peuvent être de grande taille ou non-linéaires, et nécessiter une mise au point compliquée ou des temps de calcul importants.

Boîte noire

La modélisation « boîte noire » consiste à décrire un modèle par ses relations entrées-sorties sans se préoccuper de représenter son fonctionnement interne, donc sans utiliser les équations de la physique. Le modèle boîte noire est souvent donné sous forme d'une combinaison (souvent une somme pondérée) de fonctions (polynômes, réseaux de neurones artificiels (RNA), etc.) formant une base de l'espace d'état ou de l'espace de sortie. Les paramètres du modèle (par exemple les coefficients des polynômes ou poids du RNA) sont identifiés à partir de données de mesures par des algorithmes d'optimisation cherchant à minimiser l'erreur entre la sortie du modèle et la mesure. Pour obtenir un modèle qui soit représentatif sur une large plage de fonctionnement, cette approche nécessite un grand nombre de mesures variées et peut demander une exploration importante de l'espace des paramètres (selon le type de structure).

Boîte grise

L'approche « boîte grise » fait cohabiter dans un seul modèle des aspects « boîte noire » et « boîte blanche » de façon plus ou moins nuancée vers une approche ou l'autre. La plupart des modèles sont en réalité des modèles boîte grise. Par exemple, de nombreux modèles de dynamique du véhicule combinent des équations de la physique (mécanique des solides, machines électriques, etc.) avec des tables de correspondance issues de mesures sur les différents sous-systèmes. L'utilisation de ce type de modèle est motivée par la recherche d'un compromis entre cohérence physique et bonne approximation des mesures. Cela permet également de pouvoir modéliser certains phénomènes par des relations n'ayant pas de sens physique mais une charge de calcul moindre.

1.3.3 Classification des différentes méthodes d'obtention de boîtes grises

Il est possible de classer les différents types de structures boîtes grises suivant la méthodologie appliquée lors de l'élaboration du modèle. Une classification est proposée ci-dessous, en s'appuyant sur les travaux de [SJ08].

Hybride

L'approche boîte grise la plus basique est l'assemblage de différents sous-modèles boîte blanche et boîte noire, en série ou en parallèle. Cette approche est le plus souvent utilisée lorsqu'un modèle boîte blanche comporte trop d'approximations. Un modèle boîte noire est alors ajouté pour mieux approcher les données de mesure [EFMDKL06].

Transformation entrées-sorties

Cette approche consiste à appliquer une transformation non-linéaire fondée sur des connaissances physiques du système aux entrées ou sorties d'un modèle boîte noire, de façon à ce que la relation qui doit être approximée par le modèle boîte noire soit ensuite la plus simple possible. Par exemple, une transformation non-linéaire adéquate peut permettre d'utiliser ensuite un modèle boîte noire linéaire, comme décrit dans [LL94]. Cette approche peut être considérée comme un cas particulier de l'approche hybride, avec une transformation ayant un sens physique en série avec un modèle boîte noire, mais elle est classée à part puisque l'objectif de la transformation n'est pas de représenter une partie du système mais plutôt de transformer les entrées de sorte à améliorer les performances de la partie « boîte noire ».

Réduction d'ordre

Une approche possible est de modéliser un système par un modèle boîte blanche qui est ensuite réduit pour des raisons de temps de calcul. L'étape de réduction peut être menée de diverses manières qui retiendront plus ou moins l'aspect physique du modèle [Ant05].

Empirique

La modélisation empirique consiste à modéliser un phénomène par des équations qui tendent à expliquer au mieux le phénomène au vu des expériences et des mesures, mais sans justification physique profonde. Les paramètres ont toutefois un certain sens physique : un paramètre peut par exemple expliquer la variation d'une sortie en fonction du carré de la variable d'entrée, ou expliquer la valeur de la sortie en un point de fonctionnement particulier. Un exemple de ce type

est le modèle *Magic Formula 5.2* développé par [BNP87]. Un autre exemple est celui des tables de correspondance (*look-up tables*) qui permettent d'obtenir la valeur de sortie pour différents points de fonctionnement (souvent associée à une interpolation pour obtenir la valeur au point de fonctionnement désiré).

1.3.4 Construction d'un modèle en tant que compromis

L'élaboration de la structure du modèle est un compromis entre les attributs suivants :

Cohérence physique : c'est la partie « boîte blanche » du modèle, qui permet un comportement du modèle cohérent avec les lois de la physique, même sur des plages de fonctionnement non étudiées expérimentalement.

Corrélation avec l'expérience : une partie « boîte noire » du modèle utilise des relations n'ayant pas de sens physique autre que celui de bien représenter ce qui a été observé (justification expérimentale et non théorique). Ceci permet une meilleure représentation du système par le modèle, même si la compréhension des phénomènes physiques régissant le système est limitée.

Charge de calcul : la partie « boîte noire » du modèle peut également être justifiée par une charge de calcul moindre par rapport à une modélisation « boîte blanche » lorsqu'elle utilise des tables de correspondance ou des relations empiriques simples.

Facilité de paramétrage : lors de la construction du modèle, le choix de passer par des approches plutôt « boîte noire » ou plutôt « boîte blanche » prend en considération la facilité avec laquelle on pourra paramétrer le modèle. On choisira par exemple souvent de modéliser un ressort en utilisant sa caractéristique de force en fonction de l'élongation (variation d'une variable en fonction d'une autre, les deux étant facilement mesurables), plutôt que de pousser plus loin la modélisation en utilisant la géométrie de l'hélice et des spires du ressort ainsi que les caractéristiques de son matériau, ce qui mènerait à un modèle inutilement compliqué.

Cette élaboration du modèle se fait bien entendu en ayant toujours à l'esprit l'objet de son utilisation. La construction du modèle est généralement un processus itératif puisque pour connaître le degré de raffinement avec lequel telle ou telle partie doit être modélisée il faut avoir une idée de son influence sur l'utilisation finale du modèle, ce qui ne peut s'évaluer qu'une fois le modèle construit et testé.

1.4 Modèles de dynamique du véhicule

Afin d'étudier quelques propriétés fondamentales des véhicules, comme la tendance au survirage ou la stabilité, des modèles très simplifiés sont généralement utilisés en première approximation, comme le modèle bicyclette. Ensuite, pour essayer de mieux approximer le comportement d'un véhicule, ce modèle peut être complexifié par l'ajout de non-linéarités ou de dynamiques supplémentaires. Enfin, pour approximer au mieux le comportement d'un véhicule, il existe des logiciels de simulation avec des modèles très détaillés. Ces différentes approches sont exposées dans cette section, après avoir dans un premier temps décrit les variables importantes de dynamique du véhicule communes à la plupart des modèles. La modélisation du pneumatique est utilisée ici, et est présentée plus en détail dans la prochaine section.

La figure 1.2 représente quelques paramètres importants relatifs à la géométrie du véhicule (empattement, voie) et à sa distribution de masse (distance des essieux au centre de masse

et décalage latéral du centre de masse par rapport au plan de symétrie du véhicule). Y sont également représentées les variables d'angle de braquage pour les roues avant, les roues étant habituellement désignées par les indices fl, fr, rl, rr pour l'avant gauche (*front left*), avant droite (*front right*), arrière gauche (*rear left*), arrière droite (*rear right*).

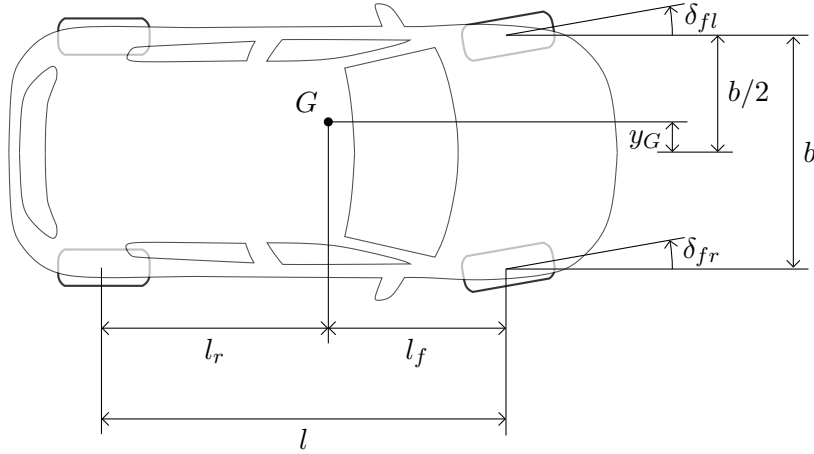


FIGURE 1.2 – Géométrie du véhicule : b et l sont la voie et l'empattement du véhicule, G est le centre de masse du véhicule, δ_{fl} et δ_{fr} sont les angles de braquage des roues avant.

Les figures 1.3 et 1.4 représentent les différents repères utilisés en dynamique du véhicule ainsi que les variables de lacet, tangage et roulis qui font le lien entre les repères sol, intermédiaire et véhicule. Le repère sol (*earth*) R_E est fixe dans le référentiel inertiel qu'est le sol. Le repère intermédiaire R_I est obtenu par rotation d'un angle ψ (lacet) autour de z_E , il a donc un plan $x-y$ parallèle au sol avec l'axe x qui pointe dans la direction du véhicule. Le repère véhicule R_V est obtenu en appliquant successivement une rotation θ (tangage) autour de y puis une rotation ϕ (roulis) autour de l'axe x obtenu après la rotation θ . Les repères des roues ont le plan $x_W - y_W$ parallèle au sol avec l'axe x_W dans le plan de la jante.

Dans la suite de la thèse, si rien n'est précisé, les vitesses et les accélérations sont exprimées dans le repère intermédiaire R_I .

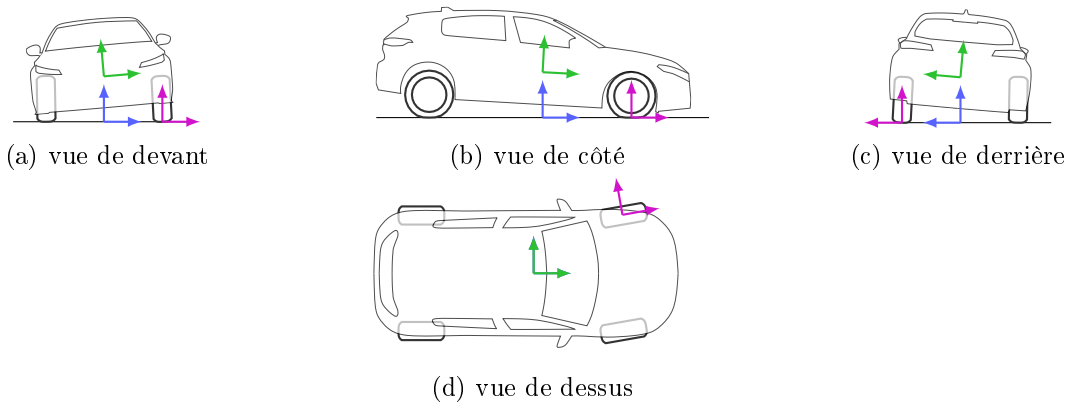
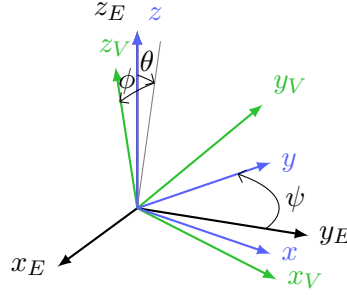


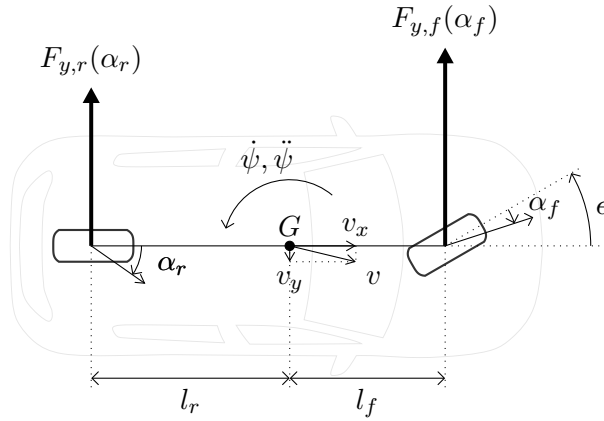
FIGURE 1.3 – Repères intermédiaire R_I , véhicule R_V et roue $R_{W,FL}$ (définition [ISO91]).

FIGURE 1.4 – Angles de lacet ψ , de tangage θ et de roulis ϕ (définition [ISO91]).

1.4.1 Modèle bicyclette

Le modèle bicyclette (Fig. 1.5) est un modèle très simple de dynamique latérale du véhicule. Ce modèle a deux degrés de liberté : la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ et la vitesse latérale v_y (ou de façon équivalente la dérive $\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x}$), et une entrée : l'angle volant. Les approximations principales faites par ce modèle sont les suivantes :

- pas de dynamique longitudinale (v_x est fixée comme un paramètre) ;
- pas de tangage, roulis, pompage ni transfert de charge ;
- symétrie complète du véhicule et des effets par rapport au plan $x - z$ (les pneus d'un même train sont identiques, et ils sont soumis à la même charge et la même dérive, le centre de gravité est sur l'axe de symétrie) ;
- pas de phénomènes aérodynamiques ;
- angles petits permettant l'approximation $\tan \alpha \approx \alpha$.

FIGURE 1.5 – Modèle bicyclette. x est positif vers l'avant du véhicule et y est positif vers la gauche du véhicule.

Les seules forces extérieures considérées sont les forces aux roues avant (*front*) et arrière (*rear*) dues à la déformation des pneumatiques en contact avec la chaussée. Les équations du modèle sont obtenues en appliquant le principe fondamental de la dynamique,

$$m(\dot{v}_y + \dot{\psi}v_x) = F_{y,f} + F_{y,r} \quad (1.8)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = l_f F_{y,f} - l_r F_{y,r} \quad (1.9)$$

où l'on a directement remplacé $a_y = \dot{v}_y + \dot{\psi}v_x$ obtenu par la formule de Bour, avec a_y et v_y

l'accélération latérale et la vitesse latérale du centre de gravité du véhicule par rapport au référentiel inertiel (sol), exprimées dans le repère du véhicule.

Les forces dues aux pneus sont obtenues en utilisant le modèle linéaire de pneu (décrit à la section 1.5.2)

$$F_{y,f} = K_{\alpha,f} \alpha_f \quad (1.10)$$

$$F_{y,r} = K_{\alpha,r} \alpha_r. \quad (1.11)$$

avec $K_{\alpha,f} < 0$ N/rad et $K_{\alpha,r} < 0$ N/rad les rigidités de dérive avant et arrière. Nous choisissons ici d'écrire $F_y = K_\alpha \alpha$ avec $K_\alpha < 0$ plutôt que $F_y = -K_\alpha \alpha$ avec $K_\alpha > 0$ (notation souvent utilisée) pour garder le même formalisme que le modèle *Magic Formula 5.2* que nous utiliserons par la suite. À l'avant, lorsque la roue a un angle de braquage, l'effort latéral du pneumatique devrait être projeté sur les axes latéral et longitudinal du repère véhicule, mais l'angle de braquage étant supposé faible on approxime l'effort latéral dans le repère pneu à l'effort latéral dans le repère véhicule.

La loi de composition des vitesses permet d'obtenir

$$\tan(\epsilon + \alpha_f) = \frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} \quad (1.12)$$

$$\tan \alpha_r = \frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \quad (1.13)$$

que l'on approxime par

$$\alpha_f = \frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} - \epsilon \quad (1.14)$$

$$\alpha_r = \frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \quad (1.15)$$

Finalement, le modèle bicyclette linéaire est obtenu

$$m(\dot{v}_y + \dot{\psi} v_x) = K_{\alpha,f} \left(\frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} - \epsilon \right) + K_{\alpha,r} \left(\frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \right) \quad (1.16)$$

$$I_{zz} \ddot{\psi} = l_f K_{\alpha,f} \left(\frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} - \epsilon \right) - l_r K_{\alpha,r} \left(\frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \right) \quad (1.17)$$

que l'on peut réécrire sous forme de représentation d'état (voir (1.4))

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_{\alpha,f} + K_{\alpha,r}}{m v_x} & \frac{K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r}{m v_x} - v_x \\ \frac{K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r}{I_{zz} v_x} & \frac{K_{\alpha,f} l_f^2 + K_{\alpha,r} l_r^2}{I_{zz} v_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-K_{\alpha,f}}{m} \\ \frac{-K_{\alpha,f} l_f}{I_{zz}} \end{pmatrix} \epsilon \quad (1.18)$$

Ce modèle peut être écrit légèrement différemment en utilisant la dérive au centre de gravité et la vitesse de lacet comme état, au lieu de la vitesse latérale et la vitesse de lacet. On obtient ce modèle équivalent en remplaçant $\alpha = \frac{v_y}{v_x}$ dans l'équation (1.18).

Angle d'Ackermann et angle de surbraquage

Lorsque le véhicule est stabilisé en virage, l'angle de braquage peut être décomposé en deux termes : l'angle d'Ackermann et l'angle de surbraquage.

$$\epsilon = \epsilon_a + \epsilon_s \quad (1.19)$$

L'angle d'Ackermann est l'angle de braquage qu'il faudrait au véhicule si les pneus ne dériveraient pas. Géométriquement, on obtient pour cet angle

$$\epsilon_a = \frac{l}{R} \quad (1.20)$$

avec R le rayon du cercle osculateur (rayon de courbure de la trajectoire du véhicule) et $l = l_f + l_r$ l'empattement du véhicule.

L'angle de surbraquage est la différence entre l'angle de braquage et l'angle d'Ackermann. On soustrait la dérive arrière à la dérive avant,

$$\alpha_f - \alpha_r = \frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} - \beta - \frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \quad (1.21)$$

$$= \frac{(l_f + l_r) \dot{\psi}}{v_x} - \epsilon \quad (1.22)$$

$$= \frac{l}{R} - \epsilon \quad (1.23)$$

où l'on a utilisé $v_x = R\dot{\psi}$. En identifiant l'expression de l'angle d'Ackermann, on obtient

$$\epsilon_s = \epsilon - \epsilon_a = -(\alpha_f - \alpha_r) \quad (1.24)$$

Survirage, sous-virage en régime permanent

En virage stabilisé (vitesse du véhicule constante), les équations (1.8) et (1.9) deviennent

$$ma_y = F_{y,f} + F_{y,r} \quad (1.25)$$

$$0 = l_f F_{y,f} - l_r F_{y,r} \quad (1.26)$$

et l'on a également

$$a_y = \dot{\psi} v_x = \frac{v_x^2}{R} \quad (1.27)$$

où l'on peut alors identifier les forces latérales avant et arrière en fonction de l'accélération latérale,

$$F_{y,f} = \frac{l_r}{l_f + l_r} ma_y = K_{\alpha,f} \alpha_f \quad (1.28)$$

$$F_{y,r} = \frac{l_f}{l_f + l_r} ma_y = K_{\alpha,r} \alpha_r \quad (1.29)$$

ce qui permet de calculer l'angle de surbraquage

$$\epsilon_s = -(\alpha_f - \alpha_r) \quad (1.30)$$

$$= -a_y \left(\frac{l_r m}{(l_f + l_r) K_{\alpha,f}} - \frac{l_f m}{(l_f + l_r) K_{\alpha,r}} \right) \quad (1.31)$$

$$= -a_y \underbrace{\left(\frac{m_f}{K_{\alpha,f}} - \frac{m_r}{K_{\alpha,r}} \right)}_{\text{taux de surbraquage}} \quad (1.32)$$

$$= -\frac{a_y}{g} \underbrace{\left(\frac{F_{z,f}}{K_{\alpha,f}} - \frac{F_{z,r}}{K_{\alpha,r}} \right)}_{\text{understeer coefficient}} \quad (1.33)$$

avec m_f et m_r les masses portées par les trains avant et arrière, qui permettent à leur tour d'introduire les charges verticales statiques à l'avant et à l'arrière $F_{z,f} = m_f g$ et $F_{z,r} = m_r g$. Ainsi, les caractéristiques du véhicule que sont le taux de surbraquage [Bad09] et le coefficient de sous-virage (*understeer coefficient*) [Pac06] sont mises en évidence.

En sous-virage, la dérive à l'avant est plus importante que la dérive à l'arrière, $\alpha_f > \alpha_r$. Le conducteur doit appliquer un angle de braquage $\epsilon > \epsilon_a$ c'est-à-dire $\epsilon_s > 0$ pour rester sur sa trajectoire de rayon R .

En survirage, à l'inverse, la dérive à l'arrière est plus importante que la dérive à l'avant, $\alpha_r > \alpha_f$. Le conducteur doit appliquer un angle de braquage $\epsilon < \epsilon_a$ c'est-à-dire $\epsilon_s < 0$ pour rester sur sa trajectoire de rayon R .

Le comportement sous-vireur ou survireur d'un véhicule est donc réfléchi lors de la conception du véhicule, mais il dépend aussi des conditions d'utilisation : par exemple si un couple de freinage ou un couple moteur (pour une traction) important est appliqué, alors la rigidité de dérive avant $K_{\alpha,f}$ s'en trouvera diminuée en ce point de fonctionnement, du fait du couplage longitudinal-latéral du pneu, accentuant le comportement sous-vireur. À l'inverse, avoir des pneus arrière usés ou appliquer un couple moteur (sur une propulsion) ou tirer le frein à main (blocage des roues arrière) aura pour effet de diminuer la force transmissible en latéral par les pneus arrière, accentuant le comportement survireur.

Stabilité

Un système tel que (1.4) est stable si et seulement si A est une matrice de Hurwitz (la partie réelle des valeurs propres de A est strictement négative). On étudie le polynôme caractéristique,

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \left(-\frac{K_{\alpha,f} l_f^2 + K_{\alpha,r} l_r^2}{I_{zz} v_x} - \frac{K_{\alpha,f} + K_{\alpha,r}}{m v_x} \right) \lambda + \frac{K_{\alpha,f} K_{\alpha,r} (l_f + l_r)^2}{m I_{zz} v_x^2} + \frac{K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r}{I_{zz}} \quad (1.34)$$

et l'on sait que pour une matrice de dimension 2, le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A). \quad (1.35)$$

En identifiant les équations (1.34) et (1.35), on obtient $\text{tr}(A) < 0$.

Dans le cas de valeurs propres complexes, la partie réelle est $\frac{\text{tr}(A)}{2} < 0$, A est bien une matrice de Hurwitz.

Dans le cas de valeurs propres réelles, au moins l'une est négative puisque la trace, qui vaut la somme des valeurs propres, est négative. Il reste alors à montrer que le produit des valeurs propres $\det(A)$ est positif pour montrer la négativité des deux valeurs propres et ainsi la stabilité du système.

$$\det(A) > 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{K_{\alpha,f} K_{\alpha,r} (l_f + l_r)^2}{m I_{zz} v_x^2} + \frac{K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r}{I_{zz}} > 0 \quad (1.37)$$

$$K_{\alpha,f} K_{\alpha,r} (l_f + l_r)^2 > -(K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r) m v_x^2 \quad (1.38)$$

On distingue deux cas :

- le cas où $-(K_{\alpha,f} l_f - K_{\alpha,r} l_r) < 0$, c'est-à-dire $-K_{\alpha,f} l_f < -K_{\alpha,r} l_r$ (les rigidités étant négatives, cela correspond par exemple à une faible rigidité avant). Dans ce cas, le système est stable.

- le cas où $-(K_{\alpha,f}l_f - K_{\alpha,r}l_r) > 0$ c'est-à-dire $-K_{\alpha,f}l_f > -K_{\alpha,r}l_r$ (les rigidités étant négatives, cela correspond par exemple à une faible rigidité arrière).

$$-\frac{K_{\alpha,f}K_{\alpha,r}(l_f + l_r)^2}{m(K_{\alpha,f}l_f - K_{\alpha,r}l_r)} > v_x^2 \quad (1.39)$$

$$\underbrace{\sqrt{-\frac{K_{\alpha,f}K_{\alpha,r}(l_f + l_r)^2}{m(K_{\alpha,f}l_f - K_{\alpha,r}l_r)}}}_{v_c} > v_x \quad (1.40)$$

avec v_c la vitesse critique, le système est stable lorsque la vitesse du véhicule est telle que $v_x < v_c$, et il est instable pour $v_x > v_c$.

Modèle bicyclette non-linéaire

Le modèle bicyclette non-linéaire utilise le modèle de pneu non-linéaire présenté en section 1.5.2, ce qui permet de mieux approximer le comportement du véhicule [LÂN11]. Ce modèle augmente en complexité dans le sens où il comprend plus de paramètres et des expressions plus développées que le modèle linéaire. Toutefois le nombre de degrés de liberté reste le même. Il est montré dans [LÂN11] que pour améliorer le modèle bicyclette il est plus pertinent d'améliorer le modèle de pneumatique plutôt que d'ajouter des dynamiques telles que le roulis permettant de modéliser les transferts de charge.

Ce modèle bicyclette non-linéaire est donc

$$\begin{pmatrix} m\dot{v}_y \\ I_{zz}\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y,f} + F_{y,r} - m\dot{\psi}v_x \\ l_f F_{y,f} - l_r F_{y,r} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

avec $F_{y,i}$ le modèle de pneu non-linéaire (1.59).

Introduire des non-linéarités permet de radicalement changer le comportement du modèle, particulièrement pour des manœuvres proches de l'instabilité du véhicule. Par exemple, la figure 1.6 présente le plan de phase d'un modèle bicyclette non-linéaire et d'un modèle bicyclette linéaire, pour une vitesse de 100 km/h, avec un angle volant de 30 degrés sur une route de faible adhérence. Sans chercher à quantifier la différence des deux modèles, on peut clairement les distinguer qualitativement. Notamment, certaines trajectoires sont instables avec le modèle non-linéaire tandis qu'elles se stabilisent pour le modèle linéaire.

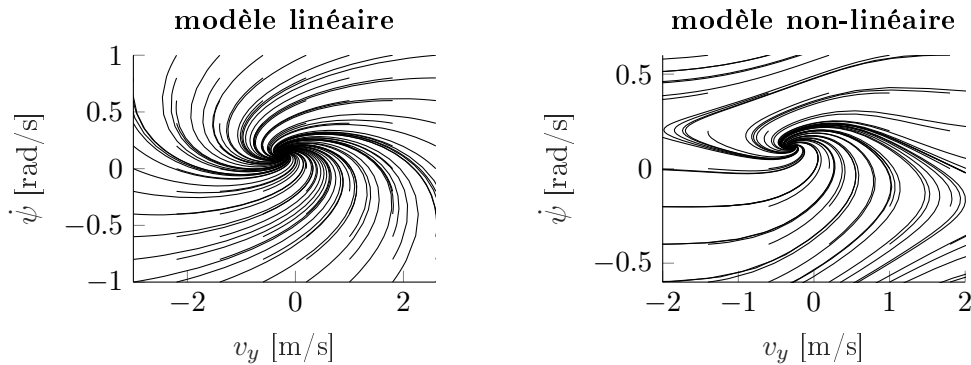


FIGURE 1.6 – Évolution des trajectoires dans l'espace d'état pour les modèles bicyclette linéaire et non-linéaire.

1.4.2 Modèles 4 roues

De nombreux modèles 4 roues (*double track*) peuvent être construits selon différentes hypothèses. Dans cette section, nous examinons quelques modèles relativement simples, les modèles plus complexes étant discutés dans la section suivante. Le premier intérêt d'utiliser un modèle 4 roues est de pouvoir modéliser le transfert de charge. Dans un modèle ne considérant que la dynamique latérale à 3 ddl ($v_y, \dot{\psi}, \phi$), le roulis ϕ permet d'inclure le transfert de charge. À cela peuvent être ajoutées la dynamique longitudinale avec les dynamiques des roues $w_{fl}, w_{fr}, w_{rl}, w_{rr}$, la vitesse longitudinale v_x et le tangage θ . À noter que le roulis et le tangage peuvent être omis si le transfert de charge est calculé préalablement et est alors pris comme une entrée du modèle. Afin d'améliorer encore le modèle, la dynamique verticale v_z de la caisse peut être ajoutée, elle a alors les 6 degrés de liberté d'un solide. Enfin, la modélisation des débattements de suspensions permet d'affiner encore le modèle, et est particulièrement importante si le véhicule évolue sur un terrain comprenant des obstacles.

Cinématique

Pour calculer la dérive et le glissement à chacune des roues, il est nécessaire d'obtenir les vitesses longitudinale et latérale à chaque roue à partir des vitesses v_x et v_y au centre de masse du véhicule. Les vitesses longitudinale et latérale dans le repère intermédiaire, ainsi que les dérives dans les repères roues sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 v_{x,fl} &= v_x - \frac{b}{2}\dot{\psi} & v_{y,fl} &= v_y + l_f\dot{\psi} & \alpha_{fl} &= \frac{v_y + l_f\dot{\psi}}{v_x - \frac{b}{2}\dot{\psi}} - \epsilon \\
 v_{x,fr} &= v_x + \frac{b}{2}\dot{\psi} & v_{y,fr} &= v_y + l_f\dot{\psi} & \alpha_{fr} &= \frac{v_y + l_f\dot{\psi}}{v_x + \frac{b}{2}\dot{\psi}} - \epsilon \\
 v_{x,rl} &= v_x - \frac{b}{2}\dot{\psi} & v_{y,rl} &= v_y - l_r\dot{\psi} & \alpha_{rl} &= \frac{v_y - l_r\dot{\psi}}{v_x - \frac{b}{2}\dot{\psi}} \\
 v_{x,rr} &= v_x + \frac{b}{2}\dot{\psi} & v_{y,rr} &= v_y - l_r\dot{\psi} & \alpha_{rr} &= \frac{v_y - l_r\dot{\psi}}{v_x + \frac{b}{2}\dot{\psi}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.42} \tag{1.43} \tag{1.44}$$

Transfert de charge

Les modèles très simplifiés font l'hypothèse que la charge verticale aux pneumatiques est constante. En réalité, dès que le véhicule subit une accélération longitudinale ou latérale, il y a un phénomène de transfert de charge (aussi appelé report de charge) qui crée une variation par rapport aux charges à l'équilibre. De plus, lorsque le véhicule est à l'équilibre à vitesse constante, les efforts aérodynamiques créent également une modification de la charge verticale (d'où les ailerons sur certaines voitures sportives pour augmenter l'appui au sol).

Dans le cas où la suspension (chassis rigide) et les effets aérodynamiques sont négligés, on a les équations suivantes :

$$hma_x = l_f(F_{z,fl} + F_{z,fr}) - l_r(F_{z,rl} + F_{z,rr}) \tag{1.45}$$

$$hma_y = \frac{b}{2}(F_{z,fl} + F_{z,rl}) - \frac{b}{2}(F_{z,fr} + F_{z,rr}) \tag{1.46}$$

$$ma_z = F_{z,fl} + F_{z,fr} + F_{z,rl} + F_{z,rr} - mg, \tag{1.47}$$

avec h la hauteur du centre de gravité. Dans un premier temps on obtient la charge sur l'essieu avant et sur l'essieu arrière en utilisant (1.45) et (1.47),

$$\begin{aligned} F_{z,fl} + F_{z,fr} &= \frac{l_r}{l} m(g + a_z) + \frac{h}{l} m a_x \\ F_{z,rl} + F_{z,rr} &= \frac{l_f}{l} m(g + a_z) - \frac{h}{l} m a_x. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Les charges sur les roues gauches et droites sont obtenues en utilisant (1.46) et (1.47),

$$\begin{aligned} F_{z,fl} + F_{z,rl} &= \frac{1}{2} m(g + a_z) + \frac{h}{b} m a_y \\ F_{z,fr} + F_{z,rr} &= \frac{1}{2} m(g + a_z) - \frac{h}{b} m a_y. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Pour obtenir la charge sur chaque roue, on choisit de partager le transfert de charge longitudinal de façon égale sur les roues d'un même essieu et on choisit de partager le transfert de charge latéral dans les proportions suivantes : l_r/l à l'avant et l_f/l à l'arrière. Ainsi, on obtient la charge sur chacune des roues,

$$\begin{aligned} F_{z,fl} &= \frac{1}{2} \frac{l_r}{l} m(g + a_z) - \frac{1}{2} \frac{h}{l} m a_x - \frac{l_r}{l} \frac{h}{b} m a_y \\ F_{z,fr} &= \frac{1}{2} \frac{l_r}{l} m(g + a_z) - \frac{1}{2} \frac{h}{l} m a_x + \frac{l_r}{l} \frac{h}{b} m a_y \\ F_{z,rl} &= \frac{1}{2} \frac{l_f}{l} m(g + a_z) + \frac{1}{2} \frac{h}{l} m a_x - \frac{l_f}{l} \frac{h}{b} m a_y \\ F_{z,rr} &= \frac{1}{2} \frac{l_f}{l} m(g + a_z) + \frac{1}{2} \frac{h}{l} m a_x + \frac{l_f}{l} \frac{h}{b} m a_y \end{aligned} \quad (1.50)$$

avec l l'empattement et b la voie. Ces équations peuvent être utilisées avec un modèle à 3 degrés de liberté ($v_x, v_y, \dot{\psi}$) si les termes d'accélération dans (1.50) sont obtenus à partir de mesures par exemple. Par contre, les équations (1.50) ne peuvent pas être intégrées dans un modèle standard, puisqu'il y aurait une boucle algébrique : le calcul de a_y nécessite de calculer F_y , qui dépend de F_z , qui est fonction de a_y ...

En ajoutant des degrés de liberté, on peut s'affranchir de ce problème de boucle algébrique. Deux approches sont possibles : modéliser les débattements de chacune des quatre roues en plus des mouvements de caisse [RG18, SG07] ou modéliser uniquement les dynamiques de roulis et de tangage de la caisse (ou qu'une des deux) en supposant les roues toujours au contact du sol [Mai12, AKB18].

Pour des modèles simples, cette deuxième approche est souvent utilisée. Les dynamiques de tangage et de roulis sont obtenues par

$$I_{yy} \ddot{\theta} = -c_\theta \dot{\theta} - k_\theta \theta + h'_\theta m_s (\dot{v}_x - \dot{\psi} v_y) + h'_\theta m_s g \theta \quad (1.51)$$

$$I_{xx} \ddot{\phi} = -c_\phi \dot{\phi} - k_\phi \phi + h'_\phi m_s (\dot{v}_y + \dot{\psi} v_x) + h'_\phi m_s g \phi \quad (1.52)$$

avec c_θ et c_ϕ les amortissements de tangage et de roulis, k_θ et k_ϕ les raideurs de tangage et de roulis, h'_θ et h'_ϕ la distance du centre de masse au centre de tangage et la distance du centre de masse à l'axe de roulis et m_s la masse suspendue. L'utilisation de h'_θ et h'_ϕ au lieu de h permet de prendre en compte la cinématique des suspensions, puisque celle-ci a un impact important sur la répartition des charges aux roues, au travers de l'effet Brouilhet (*jacking forces*) [Ger99, Dix87]. Pour le roulis, les bras de suspensions transmettent une partie de l'effort vertical entre les roues

et la caisse, ce qui tend à décharger les ressorts de suspension côté extérieur, et à plus fortement charger les ressorts côté intérieur (pour un centre de roulis au-dessus du niveau du sol, figure 1.7). Un phénomène similaire se retrouve sur la dynamique de tangage où il est appelé anti-cabrage et anti-plongée (*anti-squat*, *anti-dive*). Ces phénomènes s'opposent en partie au transfert de charge qui aurait lieu sans suspension, de sorte à mieux répartir les charges verticales sur les différentes roues.

Le calcul des charges verticales se fait ensuite à partir de θ , $\dot{\theta}$, ϕ , et $\dot{\phi}$ (voir aussi de z et $\dot{z}$ si la dynamique verticale est modélisée). Uniquement avec les dynamiques de roulis et de tangage, les charges verticales sont [AKB18]

$$\begin{aligned}
 F_{z,fl} &= \frac{1}{2} \frac{l_r}{l} mg + \frac{1}{2} \frac{k_\theta \theta + c_\theta \dot{\theta}}{l} - \frac{l_r}{l} \frac{k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi}}{b} \\
 F_{z,fr} &= \frac{1}{2} \frac{l_r}{l} mg + \frac{1}{2} \frac{k_\theta \theta + c_\theta \dot{\theta}}{l} + \frac{l_r}{l} \frac{k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi}}{b} \\
 F_{z,rl} &= \frac{1}{2} \frac{l_f}{l} mg - \frac{1}{2} \frac{k_\theta \theta + c_\theta \dot{\theta}}{l} - \frac{l_f}{l} \frac{k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi}}{b} \\
 F_{z,rr} &= \frac{1}{2} \frac{l_f}{l} mg - \frac{1}{2} \frac{k_\theta \theta + c_\theta \dot{\theta}}{l} + \frac{l_f}{l} \frac{k_\phi \phi + c_\phi \dot{\phi}}{b}.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

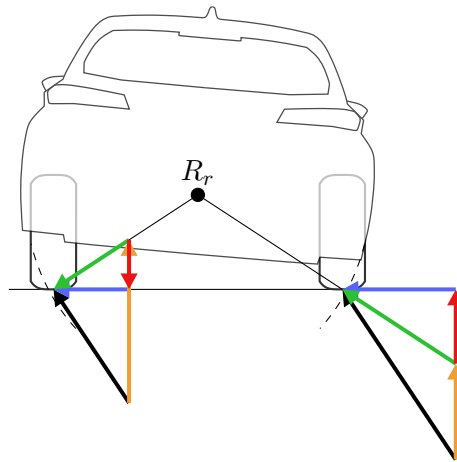


FIGURE 1.7 – Effet Brouilhet au train arrière. Les efforts verticaux transmis par les bras de suspension (*jacking forces*) sont en rouge.

Équations de la dynamique

Le modèle obtenu avec les états $v_x, v_y, \dot{\psi}, \omega_{fl}, \omega_{fr}, \omega_{rl}, \omega_{rr}, \theta, \phi$ est résumé par

$$\begin{pmatrix} m\dot{v}_x \\ m\dot{v}_y \\ I_{zz}\ddot{\psi} \\ I_r\dot{\omega}_{FL} \\ I_r\dot{\omega}_{FR} \\ I_r\dot{\omega}_{RL} \\ I_r\dot{\omega}_{RR} \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ I_{xx}\ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum F_{x,i} + F_{x,aero} + m\dot{\psi}v_y \\ \sum F_{y,i} + F_{y,aero} - m\dot{\psi}v_x \\ \sum \pm \frac{b}{2}F_{x,i} + l_f F_{y_f} - l_r F_{y_r} \\ -RF_{x,fl} + M_{drive,fl} + M_{brake,fl} \\ -RF_{x,fr} + M_{drive,fr} + M_{brake,fr} \\ -RF_{x,rl} + M_{drive,rl} + M_{brake,rl} \\ -RF_{x,rr} + M_{drive,rr} + M_{brake,rr} \\ -c_\theta\dot{\theta} - k_\theta\theta + h'_\theta m_s(\dot{v}_x - \dot{\psi}v_y) + h'_\theta m_s g\theta \\ -c_\phi\dot{\phi} - k_\phi\phi + h'_\phi m_s(\dot{v}_y + \dot{\psi}v_x) + h'_\phi m_s g\phi \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

où les sommes sont prises sur $i \in \{fl, fr, rl, rr\}$. M_z est le moment d'auto-alignement, $F_{x,aero}$ et $F_{y,aero}$ sont les forces aérodynamiques qui s'appliquent au véhicule, ramenées au centre de masse G . R est le rayon de roue, m est la masse du véhicule, I_{zz} l'inertie de la caisse en lacet et I_r l'inertie des roues. I_{yy} et I_{xx} sont les inerties de tangage et de roulis. M_{drive} et M_{brake} sont les couples moteur et de freinage, qui sont des entrées du modèle. Les efforts $F_{x,i}$, $F_{y,i}$, $F_{x,aero}$ et $F_{y,aero}$ sont calculés à partir des états du modèle et des paramètres. Si les efforts $F_{z,i}$ sont calculés à partir des accélérations (1.50), les états θ et ϕ peuvent être omis.

1.4.3 Modèles complexes

Les modèles complexes de dynamique du véhicule sont généralement des modèles multicorps. Ils décomposent au minimum la caisse et chacune des roues, puis définissent les liaisons entre ces corps. Certains vont plus loin et peuvent modéliser également les éléments de direction, les pièces composant les mécanismes de suspension et les éléments de la chaîne de traction.

Pour des applications en temps réel d'estimation de signaux ou d'identification de paramètres, des modèles allant de 2 à 8 degrés de liberté sont généralement utilisés. Par exemple, les travaux de [BB18] traitent de l'identification des paramètres d'un modèle à 4 degrés de liberté : les dynamiques longitudinale, latérale, de lacet et de roulis sont prises en compte (les vitesses des roues sont prises comme des entrées). Un autre exemple d'application est l'estimation d'état, notamment l'estimation de la dérive et du roulis, décrite par [GCC⁺18].

De nombreux modèles construits pour bien représenter le véhicule sans être trop complexes utilisent 14 degrés de liberté. Ceci semble un bon compromis puisque les dynamiques les plus importantes sont représentées : rotation de chacune des roues (4 ddl), débattement de chacune des suspensions (4 ddl), orientation et position de la caisse (3+3 ddl). On peut retrouver de tels modèles dans les travaux de [SG07, RG18] et [SHB14, Chap. 11].

Des modèles plus détaillés permettent une modélisation encore plus fine, au prix d'un coût de calcul difficilement compatible avec la plupart des applications en temps réel. Ces modèles sont intégrés à des logiciels de simulation multicorps spécialisés en dynamique de véhicule. Des exemples de tels simulateurs sont Carsim, CarMaker ou ProjectChrono [TSM⁺16]. Ces modèles sont généralement construits en utilisant à la fois une modélisation physique détaillée de certains sous-systèmes et une modélisation empirique pour d'autres sous-systèmes. Le choix d'utiliser une modélisation empirique ou physique pour un sous-système (compromis discuté en section 1.3.4) est fait en fonction des données disponibles pour construire le modèle et de l'objectif de modèle. Par exemple, les suspensions peuvent être modélisées par l'approche multicorps ou au moyen de tables de correspondance. Alors que l'approche multicorps nécessite de connaître

précisément la géométrie ainsi que les masses et inerties de chacun des éléments de la suspension, la modélisation par tables de correspondance nécessite de connaître les relations entre les variables d'intérêt, ce qui peut se mesurer sur des bancs spécialisés pour obtenir par exemple l'effort vertical ou l'angle de braquage en fonction du déplacement de la crémaillère et du débattement de la suspension. Ce type de modèles de dynamique du véhicule utilisent des modèles de pneumatiques détaillés comme le modèle MF5.2 (section 1.5.2), voire des modèles encore plus poussés comme le modèle TameTire développé par *Michelin* [FMF12], le modèle MF-Swift développé par *TASS International*, ou même des modèles à éléments finis comme FTire de *cosin scientific software*.

1.5 Modélisation du pneumatique

Le pneumatique est un élément fondamental de la dynamique du véhicule puisqu'il est le seul point de contact avec le sol, où passe l'essentiel des forces permettant d'imprimer un mouvement au véhicule (le reste étant les forces aérodynamiques, l'action de la pesanteur et les forces internes au véhicule). Le pneumatique est d'un côté monté sur la roue, et de l'autre il adhère (jusqu'à un certain point) à la chaussée, de façon que l'orientation et la vitesse de rotation de la roue engendrent des déformations et des efforts au pneumatique. Ce sont ces efforts qui, transmis au véhicule par les éléments de suspension, modifient sa trajectoire. Ces déformations du pneumatique au voisinage du point de contact avec le sol sont décrites par les phénomènes de déflexion verticale du pneumatique, de dérive et de glissement.

Les modèles de pneumatiques expriment des relations entre les déformations et les forces transmises entre le pneumatique et la chaussée. D'autres variables peuvent également intervenir dans le modèle, comme la vitesse de rotation de la roue, son inclinaison, la pression du pneu, la température, les caractéristiques de la chaussée, etc.

Physiquement, les phénomènes mis en jeu pour expliquer les déformations et les efforts du pneumatique s'expliquent par l'accrochage du pneumatique sur les irrégularités de surface de la chaussée, ainsi que par l'adhésion des chaînes de molécules du caoutchouc sur la chaussée (force de van der Waals) [Mic01]. Toutefois, ces phénomènes microscopiques seraient trop complexes à modéliser. Ainsi, les modèles utilisés en dynamique du véhicule cherchent uniquement à représenter le comportement macroscopique du pneumatique. Ce cas illustre bien la discussion au paragraphe 1.3.4 sur la construction d'un modèle comme compromis entre la modélisation à l'aide des lois physiques et un aspect plus « boîte noire » pour corrélérer au mieux avec l'expérience. Différents modèles de pneu mettent plus en avant l'un ou l'autre de ces aspects.

Dans cette section, les phénomènes physiques macroscopiques qui permettent d'expliquer le comportement du véhicule sont décrits. Une modélisation linéaire simple du pneumatique est présentée, ainsi qu'une extension non-linéaire. Enfin le modèle *Magic Formula 5.2* (MF5.2), très utilisé dans l'industrie automobile, est détaillé.

1.5.1 Phénomènes physiques macroscopiques

Le pneu est construit comme un assemblage de caoutchouc et de câbles métalliques, et peut être décomposé en plusieurs parties : le talon (jonction avec la jante), le flanc, la carcasse (structure formée par les nappes de câbles métalliques) et la bande de roulement (surface en contact avec le sol). Bien que ces différentes composantes du pneumatique participent toutes à son comportement global [Mic01], elles ne sont pas explicitement modélisées.

La loi de Coulomb pour les frottements est rapidement rappelée. Une description des phénomènes de glissement et de dérive est donnée.

Loi de Coulomb

La loi de Coulomb permet de modéliser simplement les frottements entre deux solides. Elle permet ici de mieux comprendre les phénomènes de glissement et d'adhérence entre le pneumatique et le sol. Sur le schéma de la figure 1.8 il y a adhérence tant que la force de contact $r = t + n$ reste dans le cône d'angle $\phi_0 = \arctan(\mu_0)$ avec μ_0 le coefficient de frottement statique. Si la force

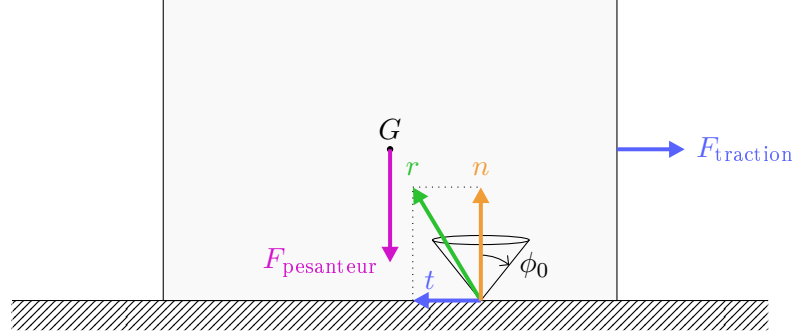


FIGURE 1.8 – Cône de frottement. La force de réaction r du sol sur le solide se décompose en une composante tangentielle t et une composante normale n .

de contact atteint le cône alors il y a glissement. La composante tangentielle est exprimée par $\|t\| = \mu\|n\|$ (indépendante de la vitesse de glissement), avec dans la plupart des cas un coefficient de frottement lors du glissement inférieur au coefficient de frottement statique $\mu < \mu_0$.

Glissement

Lors d'une accélération ou d'un freinage le pneu se déforme, entraînant une différence entre la vitesse de rotation de la roue ω par le rayon de la roue r et la vitesse longitudinale (dans le repère de la roue) du véhicule au point de contact roue-sol, notée ici simplement v_x . Le glissement est alors défini comme

$$\kappa = \frac{r\omega - v_x}{v_x}. \quad (1.55)$$

En roue libre $\kappa \approx 0$, en freinage avec blocage de la roue $\kappa = -1$ et à vitesse nulle avec la roue qui patine $\kappa = +\infty$. D'autres définitions du glissement sont parfois utilisées, avec une distinction entre le freinage et l'accélération [Raj11]. Le modèle « brosse » offre un cadre assez intuitif pour comprendre les phénomènes physiques expliquant le glissement et la dérive. Ce modèle considère des patins de gomme distincts comme des poils sur une brosse. Ces patins de gomme se déforment au contact du sol, du fait de l'adhésion d'un côté à la roue et de l'autre au sol (Fig. 1.9 et 1.10). Lorsqu'ils sont déformés, ces patins de gomme élastiques génèrent une force qui permet alors au véhicule de se déplacer. Les patins se déforment jusqu'à un certain point, au-delà duquel l'extrémité du patin en contact avec le sol n'est plus en adhérence mais en glissement (plus la gomme est tendre, plus ce point sera difficile à atteindre, et donc plus grande pourra être l'adhérence). Il faut faire attention à bien distinguer le terme de glissement employé pour décrire le fait que l'extrémité des patins glisse sur le sol, et le même terme de glissement qui est une variable de dynamique du véhicule définie à l'équation (1.55).

Lorsque les pistons viennent pousser les plaquettes de freins contre le disque de frein, un couple de freinage apparaît, on obtient un effort F_x négatif. Lorsque les patins de gomme entrent dans la surface de contact roue-sol ils se déforment progressivement et permettent ainsi de transmettre un effort. Il y a une limite à la déformation des patins : si l'effort à transmettre est trop important,

les patins se mettent à glisser. Plus l'effort à transmettre est important, plus la zone de glissement est importante. Au contraire, pour un freinage modéré il y a uniquement une zone d'adhérence, mais la déformation des patins permet tout de même que la roue freinée tourne moins vite que ne défile le sol, de sorte que le glissement défini par (1.55) soit non nul et négatif.

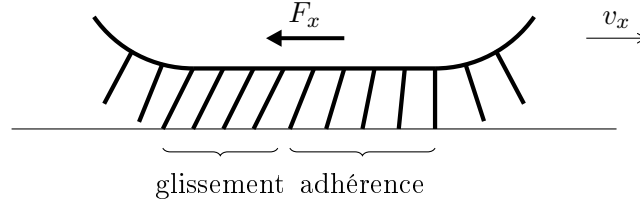


FIGURE 1.9 – Déformation des patins due à un couple freineur (la roue est ralentie).

Lorsqu'un couple moteur est appliqué à la roue on obtient un effort F_x positif. Tout comme pour le freinage, les patins de gomme se déforment pour transmettre l'effort, mais cette fois-ci dans la direction opposée.

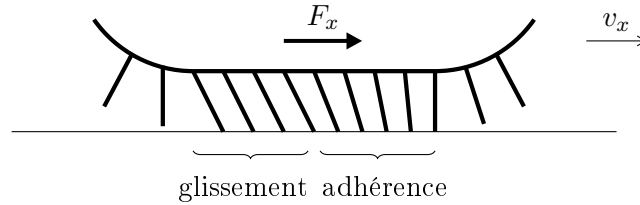


FIGURE 1.10 – Déformation des patins due à un couple moteur (la roue est accélérée).

Dérive

Lorsque le pneu n'est pas aligné sur la direction de déplacement du véhicule, il se déforme latéralement et fournit un effort latéral ainsi qu'un moment d'auto-alignement. La dérive du pneu est l'angle (dans le plan du sol) entre la direction de la roue et la direction de vecteur vitesse du véhicule par rapport au sol au point de contact roue-sol (figure 1.11),

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \quad (1.56)$$

De la même façon que les patins de gomme sont déformés dans le sens longitudinal lors d'accélération et de freinage, ils sont également déformés latéralement lorsque le véhicule prend un virage. À nouveau, les patins se déforment lorsqu'ils entrent dans la surface de contact, et ce jusqu'à ce qu'ils sortent de la surface de contact ou que l'effort à transmettre soit trop important. À ce moment l'extrémité des patins n'adhère plus au sol mais dérape. On modélise l'effort latéral résultant par un effort transversal F_y appliqué à l'origine du repère roue, et par un moment d'alignement M_z . L'effort latéral total est appliqué en arrière d'une distance $|\frac{M_z}{F_y}|$ de l'origine du repère roue. Notons que ce modèle permet une compréhension de certains phénomènes physiques en jeu, mais celle-ci est très simplifiée : en réalité pour produire un effort latéral ce ne sont pas uniquement les patins de gomme de la bande de roulement qui se déforment, mais également les flancs et la carcasse du pneu. De plus, la déformation dans la surface de contact avec le sol dépend de la charge verticale, qui n'est pas distribuée uniformément sur cette surface.

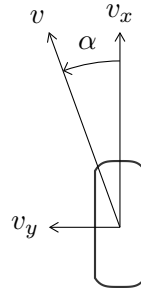


FIGURE 1.11 – Angle de dérive α , vitesse de déplacement v et projections v_x et v_y dans le repère roue.

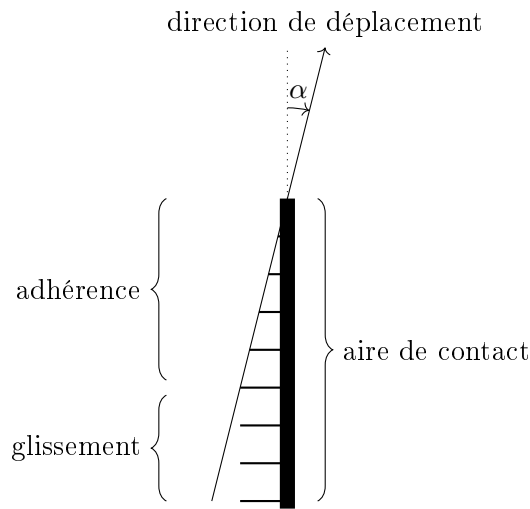


FIGURE 1.12 – Schéma de la déformation latérale des patins, vue de dessus.

Phénomènes transitoires

Le pneumatique a un comportement transitoire non négligeable. Ce phénomène peut être caractérisé par une longueur de relaxation : c'est la distance parcourue pour que le pneumatique retrouve une situation d'équilibre. Le comportement transitoire latéral peut également être caractérisé par le ballant : c'est la déformation latérale entre la surface de contact et le plan de la jante.

Le comportement transitoire du pneumatique affecte la dynamique latérale du véhicule. Ceci apparaît notamment lors d'essais de sinus wobulé (vitesse constante, angle volant décrivant un sinus dont la fréquence augmente avec le temps) où un phénomène d'anti-résonance apparaît : la vitesse de lacet du véhicule est en opposition de phase avec l'angle volant [Sch99]. Le comportement transitoire a également une influence sur le comportement longitudinal, notamment lorsque la dynamique de la roue est forte, comme par exemple pour une régulation ABS (*Anti-BlockierSystem*, système d'anti-blocage des roues). La modélisation des phénomènes transitoires est étudiée dans les travaux de [Ala15].

1.5.2 Modèles de pneumatique

Le cas de la modélisation du pneumatique illustre bien la discussion précédente sur la modélisation, qui est un compromis entre cohérence physique, corrélation avec l'expérience, charge de calcul et facilité de paramétrage. En effet, les modèles de pneumatique peuvent être classés en trois catégories : les modèles physiques complexes, les modèles physiques simples et les modèles empiriques [AKB18]. De façon plus détaillée, H. Pacejka [Pac06] représente ce compromis sur une dimension (figure 1.13) afin de montrer qu'un bon rapport entre qualité du modèle (*degree of fit, insight in tyre behavior*) et complexité du modèle ou difficulté à obtenir le modèle (*model complexity, effort, number of full scale tests and experiments*) peut s'obtenir en utilisant des lois relativement peu complexes et en les ajustant aux données issues des mesures (*similarity method*).

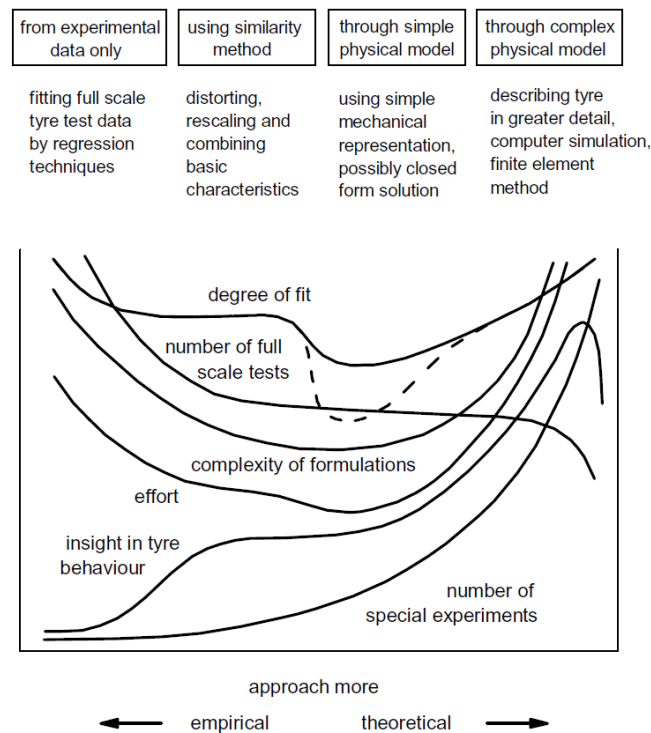


FIGURE 1.13 – Illustration des compromis d'un modèle [Pac06].

Parmi les modèles physiques simples on peut citer les modèles de Dugoff [DFS69], de Fiala, et LuGre [DWO_rL95] qui partent de principes physiques mais les approximent largement afin que le modèle résultant ne soit pas trop complexe et coûteux à évaluer [Pac06]. Les modèles TameTire de la société Michelin et Ftire de la société Cosine Scientific Software sont eux des modèles physiques complexes basés sur les éléments finis et intégrant des phénomènes tels que la variation de température et de pression du pneumatique. Enfin, les modèles MF5.2 [PB97] et dérivés (MF-tyre, MF-Swift de la société TASS International) sont fondés sur des relations empiriques qui cherchent à approximer au mieux le comportement du pneu sans pour autant utiliser des lois physiques qui rendraient le modèle lourd à calculer, ce qui serait rédhibitoire pour des applications en temps réel.

L'intérêt des différents modèles varie selon le besoin. Ainsi, pour une utilisation en contrôle, estimation d'état, ou pour des simulations avec de faibles sollicitations, un modèle pneu très

simple est généralement suffisant. On pourra considérer soit un modèle linéaire, soit ajouter quelques non-linéarités faisant intervenir peu de paramètres. Nous utiliserons dans la suite de cette thèse trois modèles : un modèle linéaire, un modèle non-linéaire construit comme une simplification du modèle MF5.2, et le modèle MF5.2.

Modèle de pneu linéaire

Que ce soit pour le comportement latéral ou longitudinal du pneumatique, un modèle linéaire peut être employé. En longitudinal, on aura alors le modèle

$$F_x = K_\kappa \kappa \quad (1.57)$$

et pour le comportement latéral,

$$F_y = K_\alpha \alpha \quad (1.58)$$

avec $K_\kappa > 0$ N et $K_\alpha < 0$ N/rad les rigidités de glissement et de dérive. C'est ce type de modèle pneu qui est généralement utilisé pour synthétiser des lois de contrôle pour la commande longitudinale ou latérale d'un véhicule.

Pour des valeurs de rigidité fixes, ces modèles ne sont valables que pour de faibles sollicitations. En considérant l'approximation d'un modèle brosse simple comme précédemment, ce modèle revient à supposer que les efforts sont proportionnels aux déformations des patins qui sont elles-mêmes proportionnelles au glissement et à la dérive, qu'il n'y a qu'une zone d'adhérence, et pas de zone de glissement.

Modèle simple de pneu non-linéaire de [LÅN11]

Afin d'améliorer la représentativité d'un modèle simple de dynamique latérale du véhicule dans le cadre du contrôle du véhicule à la limite de la stabilité, les auteurs de [LÅN11] proposent d'utiliser une version simplifiée du modèle MF5.2. Ils montrent que pour améliorer la représentativité de leur modèle bicyclette, il est plus important de modéliser la non-linéarité du pneu plutôt que d'augmenter le nombre de degrés de liberté en utilisant un modèle à quatre roues avec une modélisation du transfert de charge (dynamique de roulis).

Leur modèle est le suivant :

$$F_{y,i} = \mu F_{z,i} \sin(C \arctan(B_i \alpha_i)), \quad i \in \{f, r\}. \quad (1.59)$$

L'expression du macro-paramètre B est donnée par

$$B_i = \frac{K_i}{C \mu F_{z,i}}. \quad (1.60)$$

L'expression de la charge verticale statique est

$$F_{z,f} = \frac{l_r}{l_f + l_r} mg \quad \text{et} \quad F_{z,r} = \frac{l_f}{l_f + l_r} mg \quad (1.61)$$

μ coefficient d'adhérence ;

C coefficient de forme ;

K_i rigidité de dérive à l'origine pour l'essieu i .

Modèle MF5.2

Le modèle *Magic Formula*, très utilisé dans l'industrie, a été développé par l'université de Delft et la société Volvo [BNP87]. Il a ensuite été amélioré et complexifié [PB92]. Puis, il a été étendu pour prendre en compte les phénomènes transitoires [PB97]. C'est cette dernière version, appelée MF5.2, également décrite dans [Pac06], que nous utilisons. D'autres améliorations ont ensuite eu lieu comme la prise en compte de la pression pneumatique [BSP10], et des modèles développés commercialement comme MF-Tyre et MF-Swift sont plus poussés mais se basent sur le modèle *Magic Formula*.

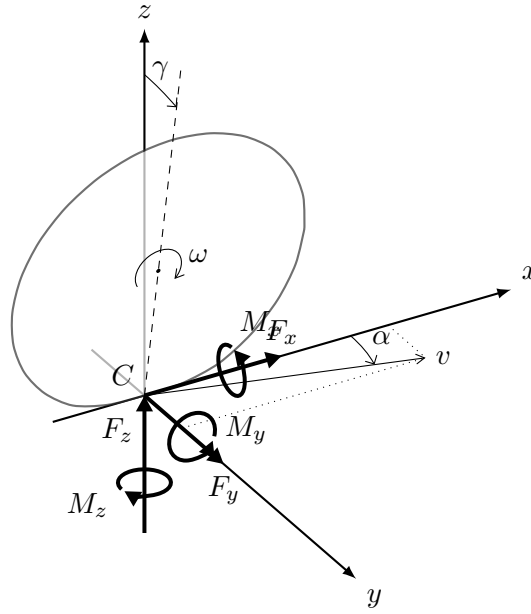


FIGURE 1.14 – Schéma d'une roue avec des variables du modèle MF5.2. La roue est dans l'axe x et a un angle d'inclinaison γ autour de x .

Le modèle MF5.2 permet d'obtenir en sortie les différentes forces et moments exercés par le sol sur le pneu :

F_x la force longitudinale ;

F_y la force latérale ;

M_z le moment d'auto-alignement (autour de l'axe vertical) ;

M_y le moment d'enroulement (autour de l'axe de la roue) ;

M_x le moment de renversement (autour de l'axe longitudinal).

Le modèle calcule ces sorties à partir des entrées suivantes :

κ le glissement ;

α la dérive ;

F_z la charge verticale ;

γ l'angle d'inclinaison entre la roue et le sol autour de l'axe x ;

v_x la composante longitudinale du vecteur vitesse au centre de la roue.

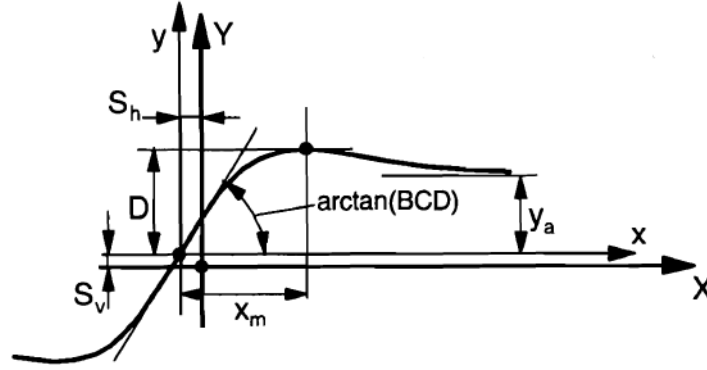


FIGURE 1.15 – Allure de la courbe de l'équation (1.62) et interprétation des « macro-coefficients » [PB97].

Les équations du modèle pour obtenir les forces F_x et F_y sont de la forme

$$y = D \sin [C \arctan \{Bx - E (Bx - \arctan Bx)\}] \quad (1.62)$$

avec

$$Y(X) = y(x) + S_V \quad (1.63)$$

$$x = X + S_H \quad (1.64)$$

où Y est la variable de sortie (F_x ou F_y) et X est la variable principale d'entrée (κ ou α). B, C, D, E sont les macro-coefficients qui déterminent l'allure de la courbe. Ces macro-coefficients sont calculés à partir d'équations faisant intervenir les autres variables d'entrée ainsi que les micro-coefficients. Les macro-coefficients affectent directement des caractéristiques de la courbe, comme représenté en Fig. 1.15.

— B est le coefficient de rigidité qui permet d'ajuster la pente à l'origine.

$$K = BCD \quad (1.65)$$

— D est le coefficient d'amplitude qui est la valeur du maximum.

— C est le coefficient de forme qui permet d'ajuster de combien la valeur finale y_a est inférieure à la valeur maximale.

$$C = 1 \pm \left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y_a}{D}\right) \quad (1.66)$$

— E est le coefficient de courbure qui permet d'ajuster l'abscisse x_m pour laquelle est atteint le maximum.

$$E = \frac{Bx_m - \tan\left(\frac{\pi}{2C}\right)}{Bx_m - \arctan(Bx_m)} \quad (1.67)$$

— S_H et S_V sont des décalages.

Le modèle calcule d'abord l'effort longitudinal pur F_{x0} (sans prise en compte de la dérive), un effort latéral pur F_{y0} (sans prise en compte du glissement) et un moment d'auto-alignement pur M_{z0} (sans prise en compte du glissement). Puis, les efforts et le moment prenant en compte le couplage entre longitudinal et latéral (figure 1.18) sont calculés en multipliant ces efforts et moment « purs » par des fonctions dépendantes de la dérive et du glissement, qui font intervenir

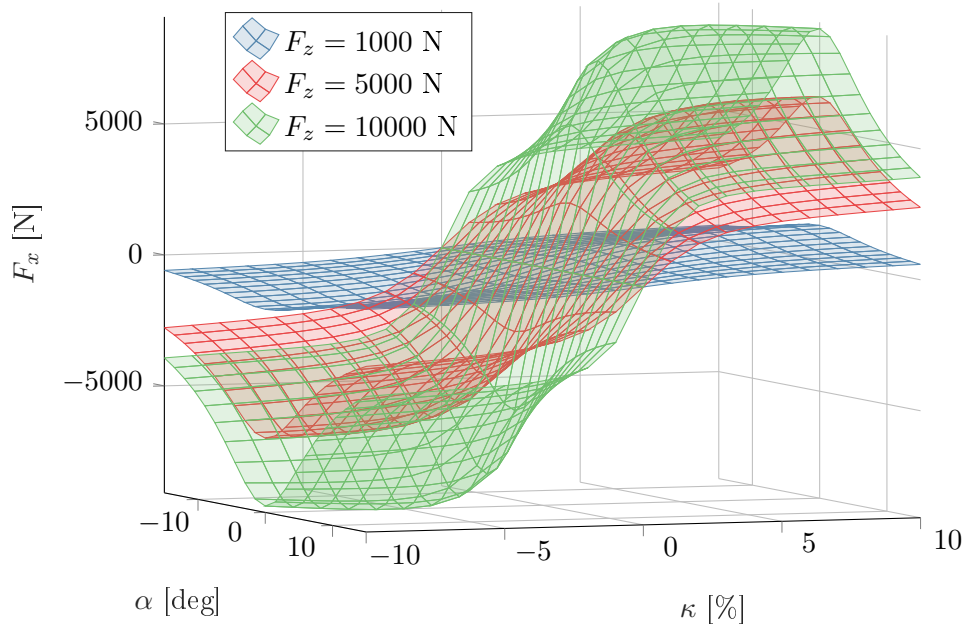


FIGURE 1.16 – Effort longitudinal en fonction de la dérive et du glissement pour différentes charges verticales (angle d'inclinaison nul).

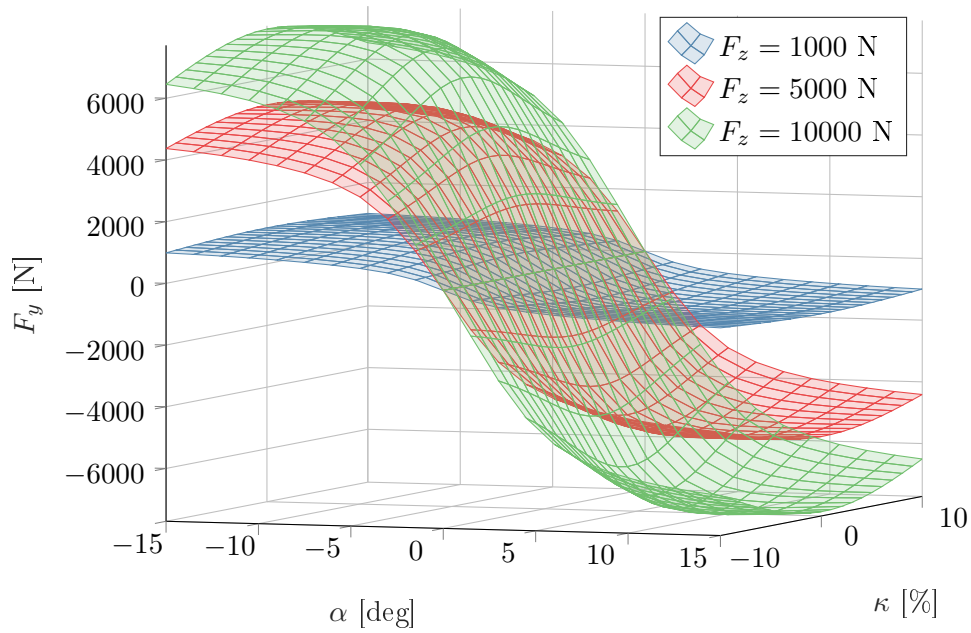


FIGURE 1.17 – Effort latéral en fonction de la dérive et du glissement pour différentes charges verticales (angle d'inclinaison nul).

également d'autres micro-coefficients.

Le détail du modèle avec l'expression des macro-paramètres en fonction des micro-paramètres est reporté en Annexe A. Un exemple est toutefois donné ici pour comprendre la forme du modèle.

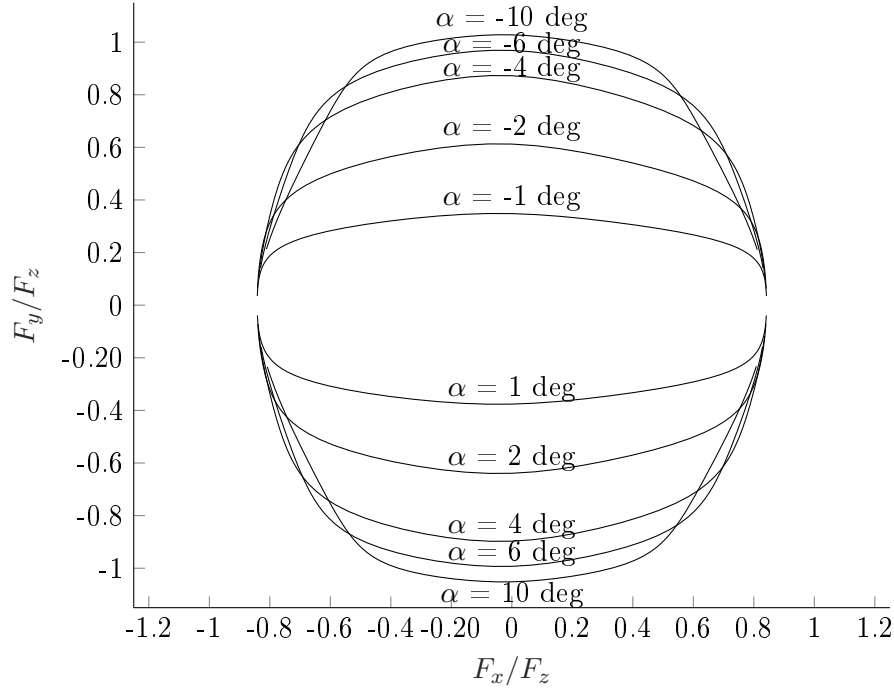


FIGURE 1.18 – Courbes d’iso-dérive pour $F_z = 4000$ N. L’enveloppe de ces courbes est la limite d’adhérence du pneumatique.

Le coefficient B_y permettant de calculer l’effort latéral pur F_{y0} est donné par

$$B_y = \frac{K_{y\alpha}}{(C_y D_y) + \epsilon_y} \quad (1.68)$$

avec ϵ_y un petit scalaire. La rigidité de dérive $K_{y\alpha}$ est obtenue et son expression est

$$K_{y\alpha} = p_{Ky1} F'_{z0} \sin \left(2 \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ky2} F'_{z0}} \right\} \right) (1 - p_{Ky3} |\gamma_y|) \lambda_{Ky\alpha} \quad (1.69)$$

avec

- p_{Ky1} rigidité de dérive à charge nominale ;
- p_{Ky2} proportion de la charge nominale pour laquelle la rigidité de dérive est maximale ;
- p_{Ky3} variation de la rigidité de dérive avec le carrossage ;
- $\lambda_{Ky\alpha}$ facteur d’échelle de la rigidité de glissement.

Ainsi on remarque que certains micro-coefficients rendent simplement compte d’une variation d’un paramètre en fonction d’une entrée comme par exemple p_{Ky3} , tandis que d’autres sont construits de façon à avoir un sens physique plus prononcé, comme par exemple p_{Ky2} qui permet d’expliciter la charge pour laquelle la rigidité de dérive est maximale. Les relations liant les paramètres et les variables sont purement empiriques et découlent du principe de similarité expliqué dans [Pac06]. Ce principe consiste à remarquer que les courbes expérimentales ont généralement des formes similaires pour différents points de fonctionnements. Les fonctions sin, arctan, etc. permettent alors de décrire l’allure générale des courbes tandis que les paramètres permettent de les ajuster selon la pression du pneumatique, l’état de la route, les dimensions du pneumatique, etc.

Le modèle MF5.2 comprend également une partie dynamique permettant de représenter les phénomènes transitoires des comportements longitudinal et latéral par des équations différentielles du premier ordre,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\sigma_\kappa} |V_{Cx}| u = |V_{Sx}| \kappa ; \quad (1.70)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\sigma_\alpha} |V_{Cx}| v = |V_{Sy}| \alpha . \quad (1.71)$$

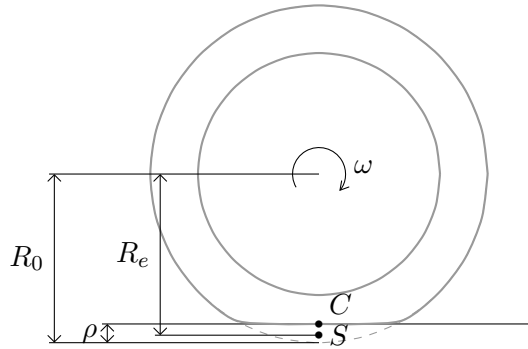


FIGURE 1.19 – Rayon libre R_0 , Rayon effectif R_e et déformation due à la charge ρ .

Les variables u et v représentent les déformations longitudinale et latérale du pneu, tandis que σ_κ et σ_α sont les longueurs de relaxation construites à partir de paramètres, de la charge et de l'angle d'inclinaison. Les variables V_{Cx} et V_{Sx} sont les vitesses longitudinales au point de contact et au point légèrement enfoncé dans la route qui est à une distance R_e du centre roue (voir figure 1.19), R_e étant le rayon effectif calculé à partir de paramètres et de la charge verticale. L'effet du transitoire est appliqué en amont du reste du modèle, puisque ces équations différentielles permettent de calculer un glissement et une dérive modifiés, κ' et α' , qui sont ensuite utilisés dans le modèle,

$$\kappa' = \frac{u}{\sigma_\kappa} \text{sgn}(V_{Cx}) ; \quad (1.72)$$

$$\tan \alpha' = \frac{v}{\sigma_\alpha} . \quad (1.73)$$

Le modèle MF5.2 comprend 130 « micro-paramètres » qui peuvent être ajustés selon le pneu considéré, répartis de la façon suivante :

- 6 paramètres pour le comportement vertical du pneumatique ;
- 28 facteurs d'échelle qui sont par défaut à 1, mais qui peuvent être ajustés pour adapter un modèle pneu à des sols d'adhérences différentes par exemple ;
- 24 paramètres pour le comportement longitudinal du pneu, dont 15 pour le longitudinal pur, 6 pour le couplage avec le latéral et 3 pour le transitoire ;
- 34 paramètres pour le comportement latéral du pneu, dont 18 pour le latéral pur, 14 pour le couplage avec le longitudinal et 2 pour le transitoire ;
- 31 pour le moment d'auto-alignement M_z ;
- 4 pour le moment de roulement M_y ;
- 3 paramètres pour le moment de renversement M_x .

Les équations du modèle MF5.2 sont décrites en détail en Annexe A.

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit les éléments constitutifs du véhicule et la notion de modèle, avant de présenter la modélisation de la dynamique du véhicule. Des modèles véhicules de complexité croissante ont été exposés, allant du modèle bicyclette à 2 degrés de libertés aux logiciels de simulation très détaillés. Les modèles de pneumatiques ont ensuite été détaillés puisque c'est sur cette partie du modèle que nous ajusterons les paramètres par la suite.

Estimation de paramètres

Sommaire

2.1	Introduction	38
2.2	Notions de théorie de l'information	39
2.3	Inférence statistique	41
2.3.1	Maximum de vraisemblance	42
2.3.2	Maximum <i>a posteriori</i>	45
2.3.3	Critère d'information d'Akaike	46
2.3.4	Modèle mal spécifié (<i>model misspecification</i>)	47
2.4	Estimation de paramètres pour modèles statiques	48
2.4.1	Modèle statique avec bruit gaussien sur la sortie	48
2.4.2	Modèle statique avec bruit gaussien sur l'entrée	48
2.4.3	Cas d'un modèle mal spécifié destiné à être utilisé pour des entrées différentes des mesures	48
2.5	Estimation de paramètres pour modèles dynamiques LTI	50
2.5.1	Représentation en fonction de transfert discrète	51
2.5.2	Autres représentations	55
2.6	Estimation de paramètres pour modèles dynamiques non-linéaires	56
2.6.1	Erreur de simulation	57
2.6.2	Méthode des tirs multiples (<i>Multiple shooting method</i>)	58
2.6.3	Erreur de prédiction, variable d'état mesurée	59
2.6.4	Erreur de prédiction, méthode du filtrage de Kalman avec vecteur d'état augmenté	59
2.6.5	Erreur de prédiction, méthode Espérance-Maximisation	60
2.7	Identifiabilité	61
2.7.1	Identifiabilité <i>a priori</i>	63
2.7.2	Identifiabilité <i>a posteriori</i>	64
2.8	Algorithmes d'optimisation	66
2.8.1	Optimisation multi-critère	66
2.8.2	Algorithmes d'optimisation directe non-linéaire	69
2.9	Conclusion	71

2.1 Introduction

L'estimation de paramètres est une des étapes du processus d'identification. L'identification d'un système (par ex. véhicule) est la recherche d'un modèle qui approxime suffisamment bien le système dans un but précis (par ex. simulation, prédiction, observation d'état, contrôle). L'identification d'un système peut se décomposer en différentes tâches représentées en figure 2.1. Cette thèse s'intéresse uniquement aux tâches de définition du critère de qualité alliée à la recherche du meilleur modèle (traitées dans ce chapitre) et à la validation du modèle obtenu.

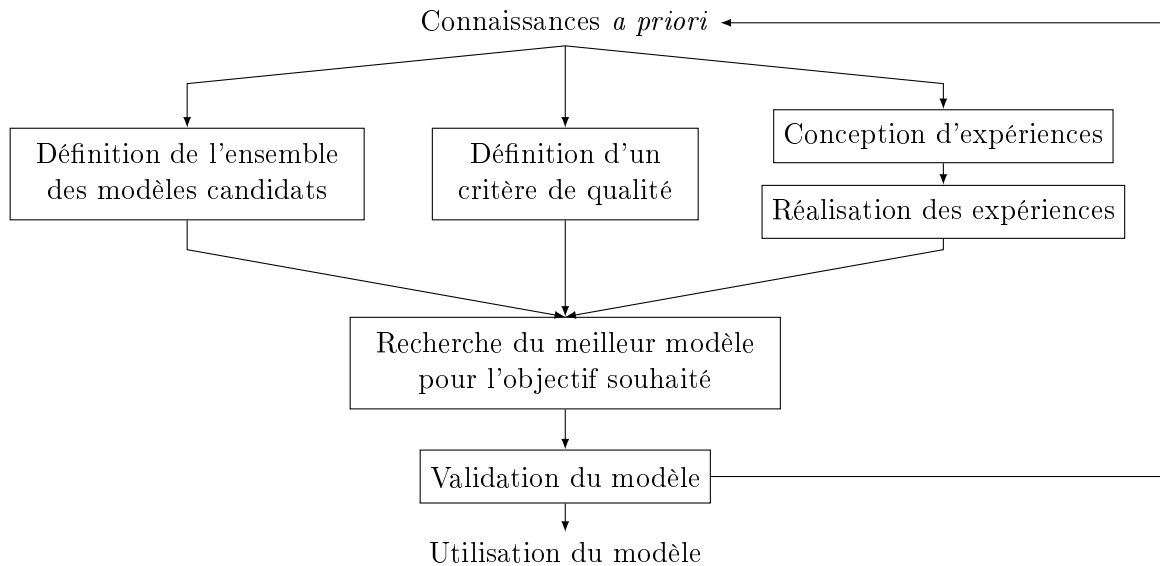


FIGURE 2.1 – Méthodologie d'identification de systèmes. Lorsque le modèle échoue à l'étape de validation, les connaissances augmentent, ce qui mène ensuite à un choix plus pertinent des modèles candidats, du critère de qualité et des expériences à mener.

Le modèle résulte de l'association d'une structure (équations d'état, fonction de transfert, etc.) et de paramètres (physiques ou non, certains, incertains, etc.). Si les connaissances *a priori* sur la structure du modèle sont limitées, une structure générique peut être choisie (par ex. polynômes, réseaux de neurones). Si des paramètres ayant un sens physique ne sont pas précisément connus, il est souvent possible de leur attribuer une valeur nominale ou incertaine. Dans cette thèse, la structure du modèle est définie *a priori*, et la recherche du meilleur modèle se réduit à optimiser les paramètres. Nous supposons également les mesures obtenues *a priori*, puisque ce sera le cas dans l'application industrielle, et nous ne nous intéresserons donc pas à la conception d'expériences. C'est donc uniquement le problème d'estimation de paramètres à partir de mesures données qui est étudié dans ce chapitre. L'objectif de l'estimation de paramètres est d'optimiser les paramètres afin que le modèle soit le plus représentatif du système pour un but précis.

Pour évaluer la représentativité du modèle, plusieurs critères de qualité peuvent être envisagés selon l'application poursuivie, les mesures obtenues sur le système, et la structure du modèle utilisée. Le choix de la méthode de recherche du meilleur modèle dépend du critère de qualité, des mesures disponibles, et de la structure du modèle. Ainsi il n'existe pas une méthode permettant un choix optimal en général, mais c'est à l'utilisateur de choisir un critère et une méthode de recherche du modèle qui correspondent aux caractéristiques d'un problème particulier. Les principales caractéristiques à considérer pour s'orienter vers une méthode plutôt qu'une autre sont :

- la structure du modèle (statique, ARX, OE, représentations d'état LTI, équations différentielles non-linéaires, etc.) ;
- l'aspect réaliste de la structure du modèle (boîte noire, blanche, grise) ;
- si le modèle est validé pour des entrées similaires ou différentes des mesures (*covariate shift*) ;
- si l'hypothèse est faite que le système peut être parfaitement représenté par le modèle, ou s'il est admis que certaines dynamiques ne sont pas modélisées (*model misspecification*).

Les travaux présentés dans cette thèse visent à estimer les paramètres d'un modèle dynamique non-linéaire, ce sont donc les techniques qui permettent d'adresser ce problème qui sont les plus étudiées. Pour introduire les concepts qui permettent de bien appréhender ces techniques, des problèmes d'estimation plus simples sont préalablement analysés. L'examen de ces problèmes d'estimation est fait à partir de la théorie de l'information, qui apporte sur la plupart des techniques un éclairage intéressant.

Dans un premier temps, une présentation succincte des notions de base de la théorie de l'information est donnée. L'inférence statistique est abordée, avec notamment les approches du maximum de vraisemblance et de l'inférence bayésienne. Ensuite, le problème d'estimation de paramètres pour le cas de modèles statiques est étudié, et permet de présenter le problème soulevé lorsque le modèle est mal spécifié et qu'il doit être validé pour un jeu d'entrées différent de celui présent sur les mesures. L'estimation de paramètres pour modèles dynamiques linéaires est ensuite abordée, et permet de lister différents types d'erreur (par ex. erreur de simulation, erreur de prédiction). Puis, différentes méthodes permettant d'adresser le problème d'estimation de paramètres pour des modèles dynamiques non-linéaires sont examinées, en s'appuyant sur les méthodes précédemment appliquées aux modèles statiques et dynamiques linéaires. Le problème d'identifiabilité est ensuite abordé, avec la détermination du jeu de paramètres à identifier. Enfin, un aperçu des techniques d'optimisation est donné, permettant de résoudre le problème d'identification.

2.2 Notions de théorie de l'information

La théorie de l'information a été introduite par Shannon [Sha48] pour l'étude des problèmes de communication d'informations (par ex. encodage optimal, communication en présence de bruit). Toutefois, la théorie de l'information a une portée plus générale et peut être reliée aux domaines de l'informatique, de la thermodynamique, des statistiques, de l'économie, etc. ([CT12]). L'approche des statistiques, et plus particulièrement de l'estimation de paramètres, à partir de la théorie de l'information est attrayante car les concepts sont relativement facilement interprétables (par ex. quantité d'information apportée par des mesures, quantité d'information comprise dans les mesures qui est expliquée par le modèle) et permettent ainsi d'inférer et de justifier des notions usuelles d'estimation de paramètres (par ex. maximum de vraisemblance, information de Fisher). Cette section peut donc sembler une digression mais les notions vues ici permettront de mieux construire et apprécier les concepts abordés dans la suite de ce chapitre.

Une information est une connaissance, une précision que l'on obtient. Réciproquement, on peut voir l'information comme la diminution de l'ignorance. Dans la théorie de l'information, notre connaissance sur un objet (l'information possédée) est modélisée de façon générale par une variable aléatoire qui peut représenter par exemple : si une assertion est vraie ou fausse (variable aléatoire binaire) ; la météo depuis une liste de possibilités {pluvieux, nuageux, ensoleillé} (variable aléatoire discrète) ; la position et l'orientation d'un aéronef (vecteur de variables aléatoires continues).

Entropie. En théorie de l'information, l'incertitude liée à une variable aléatoire est quantifiée par son entropie. L'entropie d'une variable aléatoire discrète X sur un alphabet $\mathcal{X}$ (ensemble des possibilités) avec une fonction de masse $p(x), x \in \mathcal{X}$ est

$$H(X) = \mathbb{E}_X \left[\log \frac{1}{p(X)} \right] \quad (2.1)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x). \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) implique (2.2) puisque l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire discrète est $\mathbb{E}_X [g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)p(x)$, et le logarithme de l'inverse d'une variable est $\log \frac{1}{a} = -\log a$. Selon que le logarithme naturel ou le logarithme de base 2 est utilisé, l'entropie s'exprime en nats ou en bits, les deux quantités sont proportionnelles. En communication, l'entropie exprimée en bits est le nombre minimum de bits nécessaires, en moyenne, pour encoder une réalisation de X . De façon similaire, l'incertitude liée à une variable aléatoire continue est quantifiée par son entropie différentielle.

L'entropie différentielle d'une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité $p(x)$ est

$$H(X) = \mathbb{E}_X \left[\log \frac{1}{p(X)} \right] \quad (2.3)$$

$$= - \int p(x) \log p(x) dx. \quad (2.4)$$

Entropie croisée. L'entropie d'une variable aléatoire X de distribution q , calculée en utilisant une distribution différente p , est l'entropie croisée entre q et p ,

$$H(q, p) = \mathbb{E}_q \left[\log \frac{1}{p} \right] \quad (2.5)$$

$$= \mathbb{E}_{X \sim q} \left[\log \frac{1}{p(X)} \right] \quad (2.6)$$

$$= - \sum_{x \in \mathcal{X}} q(x) \log p(x). \quad (2.7)$$

En communication, l'entropie croisée est le nombre moyen de bits nécessaires pour encoder une réalisation de $X \sim q$ en utilisant un code optimal pour encoder les réalisations d'une variable aléatoire de distribution p .

Pour une variable aléatoire continue, on a

$$H(q, p) = \mathbb{E}_q \left[\log \frac{1}{p} \right] \quad (2.8)$$

$$= - \int q(x) \log p(x) dx. \quad (2.9)$$

Divergence de Kullback-Leibler. Pour quantifier la différence entre deux distributions on utilise la divergence de Kullback-Leibler (abrégée KL-divergence) [KL51],

$$D_{\text{KL}}(q||p) = \mathbb{E}_q \left[\log \frac{q}{p} \right] \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E}_{X \sim q} \left[\log \frac{q(X)}{p(X)} \right] \quad (2.11)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}. \quad (2.12)$$

Cette mesure vérifie

$$D_{\text{KL}}(q||p) \geq 0, \text{ et } D_{\text{KL}}(q||p) = 0 \text{ ssi } p = q. \quad (2.13)$$

Toutefois, la KL-divergence n'est pas symétrique et ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

Dans le domaine de la communication, la divergence de Kullback-Leibler est le nombre moyen de bits supplémentaires à ajouter pour encoder une réalisation de $X \sim q$ en utilisant un code optimal pour une distribution p :

$$H(q, p) = H(q) + D_{\text{KL}}(q||p). \quad (2.14)$$

Pour une variable aléatoire continue, la divergence de Kullback-Leibler (KL-divergence) est donnée par

$$D_{\text{KL}}(q||p) = \mathbb{E}_q \left[\log \frac{q}{p} \right] \quad (2.15)$$

$$= \mathbb{E}_{X \sim q} \left[\log \frac{q(X)}{p(X)} \right] \quad (2.16)$$

$$= \int q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} dx. \quad (2.17)$$

En apprentissage automatique, la divergence de Kullback-Leibler est utilisée pour mesurer l'écart entre un modèle (distribution p) et des données (distribution q) [GBCB16]. Du point de vue de l'inférence bayésienne, la divergence de Kullback-Leibler est la quantité d'information obtenue en passant d'une distribution *a priori* p à une distribution *a posteriori* q . En général, on peut dire que la divergence de Kullback-Leibler est la quantité d'information perdue lorsque l'on utilise la distribution p plutôt que la distribution q [BA03].

2.3 Inférence statistique

L'inférence statistique est le fait d'inférer une distribution à partir de données [Was04]. En pratique, on suppose souvent une distribution d'une certaine forme (modèle statistique) paramétrée par un nombre fini de paramètres. L'inférence paramétrique consiste à estimer les valeurs de ces paramètres en utilisant des échantillons. L'inférence statistique non-paramétrique est plus générale, car elle cherche la forme de distribution la plus adaptée en plus d'en estimer les paramètres. Cette dernière approche n'est que marginalement évoquée, car le problème étudié dans cette thèse n'est pas de déterminer une structure de modèle, mais uniquement d'estimer des paramètres d'une structure connue.

Il existe différentes approches pour appréhender l'inférence statistique. Les deux principales sont l'approche fréquentiste et l'approche bayésienne. Ces différentes approches peuvent mener à

des résultats proches mais d'interprétation statistique différente. En effet, l'approche fréquentiste considère un grand nombre d'observations $y_1, \dots, y_n$ comme étant des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire objective Y inconnue, et étudie la fréquence avec laquelle apparaissent les différentes réalisations. L'approche bayésienne considère les observations $y_1, \dots, y_n$ fixes, et c'est le modèle (ou le paramétrage du modèle) qui est considéré comme une variable aléatoire subjective traduisant la croyance ou l'incertitude sur un phénomène. L'inférence est faite à partir d'observations. L'objectif de l'approche fréquentiste est de trouver une distribution qui représente aussi bien que possible la variable aléatoire objective inconnue Y , tandis que l'objectif de l'approche bayésienne est d'affiner le modèle (diminuer son incertitude) au fur et à mesure que de nouvelles observations sont connues.

Les approches fréquentiste et bayésienne mènent à différents estimateurs, notamment les estimateurs du maximum de vraisemblance et du maximum *a posteriori*, qui permettent d'estimer les valeurs des paramètres d'un modèle. Ces deux estimateurs sont décrits dans les sous-sections suivantes, où leur interprétation du point de vue de la théorie de l'information est également donnée. Ensuite, une rapide digression est faite sur le critère AIC (*Akaike's Information Criterion*) qui permet de comparer des modèles statistiques entre eux, et donc de faire une inférence statistique non-paramétrique. Finalement, le cas de modèles mal spécifiés est abordé. Ce sujet est développé dans la section suivante sur les modèles statiques.

2.3.1 Maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MV ou en anglais *maximum likelihood estimator*, MLE) est une méthode très répandue pour estimer les paramètres d'un modèle. Elle dérive de l'approche fréquentiste des statistiques. Le développement historique de cette méthode est retracé dans [Sti07]. On peut l'interpréter comme la méthode qui permet d'obtenir le vecteur de paramètres θ qui maximise la vraisemblance d'obtenir les mesures $y_1, \dots, y_N$ à partir du modèle $p(y|\theta)$. Le modèle $p(y|\theta)$ est ici une simple distribution paramétrée. Les cas de modèles avec entrées et de modèles dynamiques sont abordés ultérieurement dans ce chapitre.

On considère les mesures $y_1, \dots, y_N$ comme N réalisations indépendantes d'une variable aléatoire objective Y ayant une distribution $q = p(\cdot|\theta^*)$, avec θ^* le vrai paramètre. La fonction de vraisemblance est

$$L_N(\theta) = \prod_{k=1}^N p(y_k|\theta). \quad (2.18)$$

La probabilité pour une réalisation de Y d'avoir la valeur y est $q(y)$. Maximiser la vraisemblance permet d'ajuster le vecteur de paramètres θ du modèle p afin que la distribution $p(y|\theta)$ soit aussi proche que possible de la vraie distribution q .

La fonction logarithme étant monotone et strictement positive, maximiser la vraisemblance est équivalent à maximiser la log-vraisemblance

$$\ell_N(\theta) = \ln L_N(\theta) = \sum_{k=1}^N \ln p(y_k|\theta). \quad (2.19)$$

Cette expression permet des calculs plus aisés, notamment pour dériver la fonction à maximiser. Elle permet également de faire le lien avec la théorie de l'information.

Maximum de vraisemblance et théorie de l'information

Pour N suffisamment grand, en divisant par N la log-vraisemblance on obtient l'espérance de $\ln p(Y|\theta)$. C'est l'opposé de l'entropie croisée,

$$\frac{1}{N} \ell_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln p(y_k|\theta) \quad (2.20)$$

$$= \mathbb{E}_{Y \sim q} [\ln p(Y|\theta)] \quad (2.21)$$

$$= \int q(y) \ln p(y|\theta) dy \quad (2.22)$$

$$= -H(q, p) \quad (2.23)$$

où $H(q, p)$ est l'entropie croisée entre q et p . L'ajout d'une constante ne modifie pas le problème d'optimisation. Par conséquent en ajoutant $H(q)$ on obtient l'équivalence entre le maximum de vraisemblance et la minimisation de la KL-divergence (en utilisant la relation (2.14)),

$$\arg \max_{\theta} L(\theta) = \arg \max_{\theta} -H(q, p) + H(q) \quad (2.24)$$

$$= \arg \max_{\theta} -D_{\text{KL}}(q||p) \quad (2.25)$$

$$= \arg \min_{\theta} D_{\text{KL}}(q||p). \quad (2.26)$$

La KL-divergence mesure l'écart entre le modèle $p(\cdot|\theta)$ et les observations (distribuées selon q). Il est donc pertinent de vouloir minimiser cette distance, ce que fait l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Propriétés du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance fait l'hypothèse que les observations sont distribuées selon une instance de la famille de distributions paramétrées utilisée pour le modèle. Toutefois, cet estimateur reste efficace même si cette hypothèse n'est pas vérifiée. C'est ce qui sera abordé dans la section 2.3.4.

L'estimateur du maximum de vraisemblance a les propriétés suivantes :

convergent : il converge en probabilité vers la vraie valeur θ^* ;

invariant : si θ^{MV} est l'estimation du maximum de vraisemblance pour θ et g est une transformation, alors $g(\theta^{\text{MV}})$ est l'estimation du maximum de vraisemblance pour $g(\theta)$;

asymptotiquement efficace : pour un grand nombre d'observations, l'estimation du maximum de vraisemblance a la plus faible variance parmi tous les estimateurs ;

asymptotiquement normal : $\theta^{\text{MV}} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{N}(\theta^*, \mathcal{I}^{-1})$ avec $\mathcal{I}$ la matrice d'information de Fisher.

Information de Fisher

L'information de Fisher $\mathcal{I}$ est définie lorsque la distribution du modèle $p(Y|\theta)$ appartient à la même famille de distribution que les observations, dont la distribution est notée ici $p(Y|\theta^*)$, avec θ^* le vrai vecteur de paramètres (c'est l'hypothèse faite par le principe du maximum de vraisemblance). L'information de Fisher est la variance de la fonction de score V , la fonction

de score étant la dérivée (ou le gradient) de la log-vraisemblance par rapport à θ . Pour un seul paramètre, la fonction de score est

$$V = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta)}{L(\theta)} \quad (2.27)$$

V est fonction à la fois de θ et des observations $y_1, \dots, y_N$ distribuées selon q . L'espérance de la fonction de score par rapport aux observations, évaluée en $\theta = \theta^*$, est nulle,

$$\mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [V] = \int \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p(y|\theta)}{p(y|\theta)} p(y|\theta) dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int p(y|\theta) dy = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0 \quad (2.28)$$

et la variance de la fonction de score est l'information de Fisher

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [(V - \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [V])^2] \quad (2.29)$$

$$= \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [V^2] \quad (2.30)$$

$$= \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(Y|\theta) \right) \right] \quad (2.31)$$

Dans le cas où θ est un vecteur de paramètres, la fonction de score est le gradient

$$V = \nabla_\theta \ln p(X|\theta), \quad (2.32)$$

et l'information de Fisher est la matrice

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [(V - \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [V]) (V - \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [V])^\top] \quad (2.33)$$

$$= \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [VV^\top] \quad (2.34)$$

$$= \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} [(\nabla_\theta \ln p(Y|\theta)) (\nabla_\theta \ln p(Y|\theta))^\top] \quad (2.35)$$

dont les coefficients sont

$$(\mathcal{I}(\theta))_{ij} = \mathbb{E}_{Y \sim p_\theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln p(Y|\theta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln p(Y|\theta) \right) \right]. \quad (2.36)$$

La log-vraisemblance peut être approximée autour de $\theta = \theta^{\text{ML}} = \theta^*$ par

$$\ell(\theta) = \ell(\theta^*) - \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^\top \mathcal{I}(\theta^*)(\theta - \theta^*) + o(\|\theta - \theta^*\|_2) \quad (2.37)$$

L'inégalité de Cramér-Rao stipule que $\mathcal{I}(\theta^*)^{-1}$ est une borne inférieure de la précision (variance de l'estimation) pour tous les estimateurs. L'estimateur du maximum de vraisemblance atteint cette borne.

L'information de Fisher est également la matrice hessienne de la KL-divergence entre le modèle p_θ et la vraie distribution des mesures p_{θ^*} au voisinage du point $\theta = \theta^*$. De plus, en ce point, la KL-divergence est nulle et est minimisée. Il n'y a donc pas de terme constant ni de terme du premier ordre,

$$D_{\text{KL}}(p_\theta \| p_{\theta^*}) = \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^\top \mathcal{I}(\theta^*)(\theta - \theta^*) + o(\|\theta - \theta^*\|_2). \quad (2.38)$$

Donc l'estimateur du maximum de vraisemblance minimise la KL-divergence, et la log-vraisemblance correspond à l'opposé (à une constante près) de la KL-divergence au voisinage de la vraie valeur θ^* [BA03, p.453].

Exemple : estimation de la moyenne d'une variable aléatoire normale

Pour des observations issues d'une variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et en utilisant une loi normale comme modèle, il suffit de remplacer $p(y_k|\theta)$ par l'expression d'une gaussienne (avec σ connu, et $\theta = \mu$)

$$p(y_k|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.39)$$

pour obtenir

$$\sum_{k=1}^N \ln p(y_k|\theta) = \text{cst} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - \mu)^2}{\sigma^2}, \quad (2.40)$$

où « cst » est une constante. Maximiser la log-vraisemblance en ajustant la moyenne μ revient alors à minimiser l'erreur des moindres carrés.

2.3.2 Maximum *a posteriori*

Le problème d'inférence statistique, abordé du point de vue de l'inférence bayésienne, conduit à l'estimateur du maximum *a posteriori*. Le fondement de l'inférence bayésienne est le théorème de Bayes

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \quad (2.41)$$

où $p(A)$ est la probabilité *a priori* de A et $p(A|B)$ est la probabilité *a posteriori* de A , sachant B . En termes d'estimation de paramètres, cela se traduit par une distribution *a priori* $p(\theta)$ des valeurs des paramètres, qui sera ajustée en tenant compte des observations pour obtenir une probabilité *a posteriori* $p(\theta|y_1, \dots, y_N)$. En notant l'ensemble des observations $\{y_1, \dots, y_N\} = y_{1:N}$, la distribution *a posteriori* des paramètres est

$$p(\theta|y_{1:N}) = \frac{p(y_{1:N}|\theta)p(\theta)}{p(y_{1:N})}. \quad (2.42)$$

Si les observations sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) on retrouve la fonction de vraisemblance dans cette expression,

$$p(\theta|y_{1:N}) = \frac{\prod_{k=1}^N p(y_k|\theta)p(\theta)}{p(y_{1:N})} \quad (2.43)$$

$$= \frac{L_N(\theta)p(\theta)}{p(y_{1:N})} \quad (2.44)$$

Comme le dénominateur ne dépend pas de θ , alors

$$p(\theta|y_{1:N}) \propto L_N(\theta)p(\theta). \quad (2.45)$$

La plupart des modèles nécessitant une valeur fixe plutôt qu'une distribution pour les paramètres, on peut donc rechercher la valeur la plus probable (bien que d'autres choix puissent être possibles). C'est l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP)

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} \prod_{k=1}^N p(y_k|\theta)p(\theta). \quad (2.46)$$

Par analogie au maximum de vraisemblance, on peut réécrire le problème d'optimisation en utilisant la fonction logarithme :

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} \sum_{k=1}^N \ln p(y_k|\theta) + \ln p(\theta). \quad (2.47)$$

A *priori* impersonnel

L'estimateur du maximum *a posteriori* est similaire à l'estimateur du maximum de vraisemblance, si ce n'est pour le terme de l'*a priori* sur les paramètres. Dans le cas où aucune information n'est disponible *a priori* sur les paramètres, on cherche à influencer le moins possible l'estimateur, et donc à utiliser un *a priori* impersonnel (*noninformative prior*). Il est alors tentant d'utiliser une distribution *a priori* uniforme. Toutefois, une telle distribution reste subjective : pour s'en convaincre il suffit de considérer une transformation sur l'espace des paramètres. En effet, si le même problème est abordé d'une part avec un paramètre θ , et d'autre part avec un paramètre $\eta = \theta^2$, on constate que l'*a priori* uniforme sur θ n'est pas équivalent à un *a priori* uniforme sur η , ce qui conduit l'estimation à retourner des valeurs de paramètres différentes. Ce problème est une illustration du paradoxe de Bertrand. Dans le cas d'un seul paramètre, on peut utiliser l'*a priori* de Jeffreys, qui est construit comme la racine carrée de l'information de Fisher [CT12],

$$p(\theta) = \sqrt{\mathcal{I}(\theta)}. \quad (2.48)$$

Maximum *a posteriori* et théorie de l'information

De façon semblable à l'estimateur du maximum de vraisemblance, le problème d'optimisation du maximum *a posteriori* peut être exprimé en fonction de la KL-divergence et de la distribution *a priori* des paramètres,

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} L(\theta|y_{1:N})p(\theta) \quad (2.49)$$

$$= \arg \max_{\theta} \left(\sum_{k=1}^N \ln p(y_k|\theta) \right) + \ln p(\theta) \quad (2.50)$$

$$= \arg \max_{\theta} \mathbb{E}_{Y \sim q} [\ln p(Y|\theta)] + \frac{1}{N} \ln p(\theta) \quad (2.51)$$

$$= \arg \min_{\theta} D_{\text{KL}}(q||p_{\theta}) + \frac{1}{N} \ln p(\theta). \quad (2.52)$$

2.3.3 Critère d'information d'Akaike

Le critère AIC (*Akaike's Information Criterion*) permet de rechercher le meilleur modèle parmi un ensemble de modèles candidats [BA03]. Ces modèles candidats n'appartiennent pas nécessairement à une même famille de distributions paramétrées, et la distribution des observations n'appartient pas nécessairement à l'ensemble des modèles candidats. Le critère AIC est donc plus général que le principe du maximum de vraisemblance ou du maximum *a posteriori* [Aka98]. De plus, le critère AIC ne nécessite pas l'hypothèse de se placer dans l'approche fréquentiste ou bayésienne. Ce critère est issu de la théorie de l'information. L'idée de départ est de chercher θ qui minimise l'espérance de la KL-divergence (ou de façon équivalente, qui maximise l'espérance de la log-vraisemblance). Puisque seul un nombre fini d'observations est connu, il est impossible

de calculer exactement la KL-divergence entre p et q (équation (2.15)). Il est également impossible d'identifier le meilleur paramètre pour le modèle p dans l'absolu, mais seulement le meilleur paramètre pour le modèle p connaissant uniquement les observations disponibles. D'où l'idée de s'intéresser à la KL-divergence prise en moyenne pour les différents jeux d'observations $y_{1:N} \sim q$ (cela peut s'apparenter à de la validation croisée, *cross-validation*),

$$\mathbb{E}_{y_{1:N} \sim q} [D_{\text{KL}}(q||p_{\hat{\theta}})] = \mathbb{E}_{y_{1:N} \sim q} \left[D_{\text{KL}} \left(q||p(\cdot|\hat{\theta}(y_{1:N})) \right) \right] \quad (2.53)$$

$$= \int q(y) \ln q(y) dy - \mathbb{E}_{y_{1:N} \sim q} \left[\int q(y) p(y|\hat{\theta}(y_{1:N})) dy \right] \quad (2.54)$$

$$\propto -\mathbb{E}_{y_{1:N} \sim q} \left[\mathbb{E}_{Y \sim q} \left[p(Y|\hat{\theta}(y_{1:N})) \right] \right] \quad (2.55)$$

Une estimation de cette quantité dans le cas d'une distribution p capable de suffisamment bien approximer q est

$$-\ell_N(\hat{\theta}) + d, \quad (2.56)$$

avec d le nombre de paramètres du modèle.

Le critère AIC consiste à choisir, parmi tous les modèles candidats, le modèle qui minimise le critère

$$\text{AIC} = -2\ell_N(\hat{\theta}) + 2d \quad (2.57)$$

Le coefficient -2 est présent pour des raisons historiques, afin de faire le lien avec d'autres quantités utilisées en statistiques. Ce critère peut être vu comme un compromis entre la représentativité du modèle et la complexité du modèle (ici mesurée par son nombre de paramètres) [BA03]. Ce compromis n'a toutefois rien d'arbitraire : il est entièrement justifié et dérivé de la notion de KL-divergence, qui permet de mesurer la quantité d'information perdue en approximant q (distribution des observations) par p (modèle).

2.3.4 Modèle mal spécifié (*model misspecification*)

Pour les estimateurs MV et MAP, l'hypothèse était faite que la distribution des observations appartient à la famille de distributions paramétrées utilisée comme modèle. Or, en pratique, cette hypothèse peut s'avérer difficilement vérifiable, il est donc primordial de s'en affranchir. Dans de nombreux modèles, l'ajout d'un bruit stochastique permet de modéliser de façon simple une incertitude sur des entrées ou des dynamiques non modélisées. Cette perturbation permet de modéliser l'écart entre la partie déterministe du modèle et le vrai système.

Lorsque l'hypothèse est faite qu'aucun paramétrage du modèle ne permet de parfaitement représenter le système, l'estimateur MV devient le QMV (*QMLE, Quasi-Maximum Likelihood Estimator*). Cet estimateur converge vers une valeur $\hat{\theta}$ et est asymptotiquement normalement distribué [Whi82]. Il rejoint le critère AIC qui ne suppose pas que la distribution des observations appartienne à la même famille que le modèle (puisque'il permet de comparer différents modèles). Ne pas connaître le type de distribution à utiliser ne semble donc pas rédhibitoire : il suffit d'utiliser une famille de distributions paramétrées qui permet approximativement de modéliser les observations. L'estimateur QMV permet alors d'estimer les valeurs des paramètres de cette distribution. Par contre, pour des modèles qui ne sont plus des distributions mais des fonctions ou des équations différentielles, avec des entrées ou des états, le fait d'avoir un modèle mal spécifié et de chercher un modèle qui se comporte au mieux pour des entrées différentes de celles sur les mesures utilisées pour l'estimation de paramètres conduit à des difficultés. Ceci est abordé dans la section suivante pour les modèles statiques. Il est à noter que de nombreux auteurs ne

font pas la distinction entre MV et QMV, et appliquent directement l'estimateur MV, même si la distribution des observations n'est pas supposée appartenir à la famille de distributions paramétrées utilisée comme modèle. Le seul inconvénient de ne pas faire la distinction est de perdre des propriétés de convergence en probabilité vers la vraie valeur (il n'y a plus de vraie valeur dans ce cas) et d'efficacité asymptotique sans l'avoir explicité.

2.4 Estimation de paramètres pour modèles statiques

Jusqu'ici, les méthodes du maximum de vraisemblance et du maximum *a posteriori* ont été appliquées à l'estimation des paramètres d'une distribution. Dans cette section, ces méthodes sont appliquées à l'estimation de paramètres pour des modèles statiques, c'est-à-dire des fonctions paramétrées. En particulier, l'étude des modèles statiques permet de s'intéresser au problème des modèles mal spécifiés (*misspecified*) et qui sont utilisés ou validés avec des entrées différentes de celles qui ont permis d'estimer les paramètres (*covariate shift*).

2.4.1 Modèle statique avec bruit gaussien sur la sortie

Considérons le modèle $y = f(x, \theta) + \eta$ avec $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et θ le vecteur de paramètres. La log-vraisemblance est

$$\sum_{k=1}^N \ln p(y_k | \theta) = \text{constant} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - f(x_k, \theta))^2}{\sigma^2}. \quad (2.58)$$

On peut estimer θ en minimisant la fonction coût

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N \frac{(y_k - f(x_k, \theta))^2}{\sigma^2}. \quad (2.59)$$

2.4.2 Modèle statique avec bruit gaussien sur l'entrée

Un tel modèle peut s'écrire $y = f(x + \eta, \theta)$ avec $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et θ le vecteur de paramètres. Dans le cas où le modèle est linéaire par rapport à l'entrée, le bruit sur la sortie reste gaussien, le problème se ramène alors à nouveau à une minimisation des moindres carrés. Si le modèle est non-linéaire et le bruit a une variance faible, on pourra considérer le modèle comme quasi linéaire pour les faibles variations dues au bruit.

2.4.3 Cas d'un modèle mal spécifié destiné à être utilisé pour des entrées différentes des mesures

Lorsque le modèle est mal spécifié (*misspecified model*) et est utilisé ou validé pour des entrées différentes de celles utilisées pour estimer les paramètres (*covariate shift*), l'estimateur QMV n'est plus optimal. Ce cas est discuté dans [Shi00], qui montre qu'il faut alors introduire une pondération dans l'estimateur, ce qui résulte en l'estimateur MWLE (*Maximum Weighted log-Likelihood Estimator*). Le raisonnement derrière l'introduction de cette pondération est le suivant : le modèle doit être performant en moyenne pour toutes les entrées qui lui sont appliquées. Donc, lorsque le modèle a des entrées, la fonction à maximiser n'est plus (2.19) mais

$$\ell_N(\theta) = \mathbb{E}_U \left[\sum_{k=1}^N \ln p(y_k | u, \theta) \right]. \quad (2.60)$$

Dans [Shi00], l'auteur considère que les entrées utilisées pour estimer les paramètres sont distribuées selon q_0 et les entrées pour lesquelles on souhaite que le modèle soit performant sont distribuées selon q_1 . Il montre alors la nécessité d'utiliser l'estimateur MWLE qui maximise

$$\ell_{w,N}(\theta) = \sum_{k=1}^N w_k \ln p(y_k | u_k, \theta) \quad (2.61)$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{q_1(u_k)}{q_0(u_k)} \ln p(y_k | u_k, \theta). \quad (2.62)$$

Dans le cas où $q_1 = q_0$, on retrouve bien l'estimateur QMV.

Intuitivement, le rapport $\frac{q_1(u_k)}{q_0(u_k)}$ met un poids plus élevé sur les observations dont les entrées sont très représentées dans q_1 , et faiblement représentées dans q_0 . À l'inverse, un poids faible est attribué aux observations dont les entrées sont peu représentées dans q_1 et fortement représentées dans q_0 . Cette pondération se justifie ainsi : en reprenant l'équation (2.60) et en l'appliquant à l'estimateur MWLE, on obtient l'estimation QMV (en prenant l'espérance sur le jeu d'entrées pour lequel le modèle doit être validé),

$$\mathbb{E}_{U \sim q_0} \left[\frac{q_1(U)}{q_0(U)} \sum_{k=1}^N \ln p(y_k | U, \theta) \right] = \int q_0(u) \frac{q_1(u)}{q_0(u)} \sum_{k=1}^N \ln p(y_k | U, \theta) du \quad (2.63)$$

$$= \mathbb{E}_{U \sim q_1} \left[\sum_{k=1}^N \ln p(y_k | U, \theta) \right]. \quad (2.64)$$

Exemple issu de [Shi00] Afin d'illustrer l'influence de cette pondération, considérons l'exemple produit dans [Shi00]. Les observations $y_1, \dots, y_N$ sont données par l'équation

$$y = -x + x^3 + \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.3^2), \quad (2.65)$$

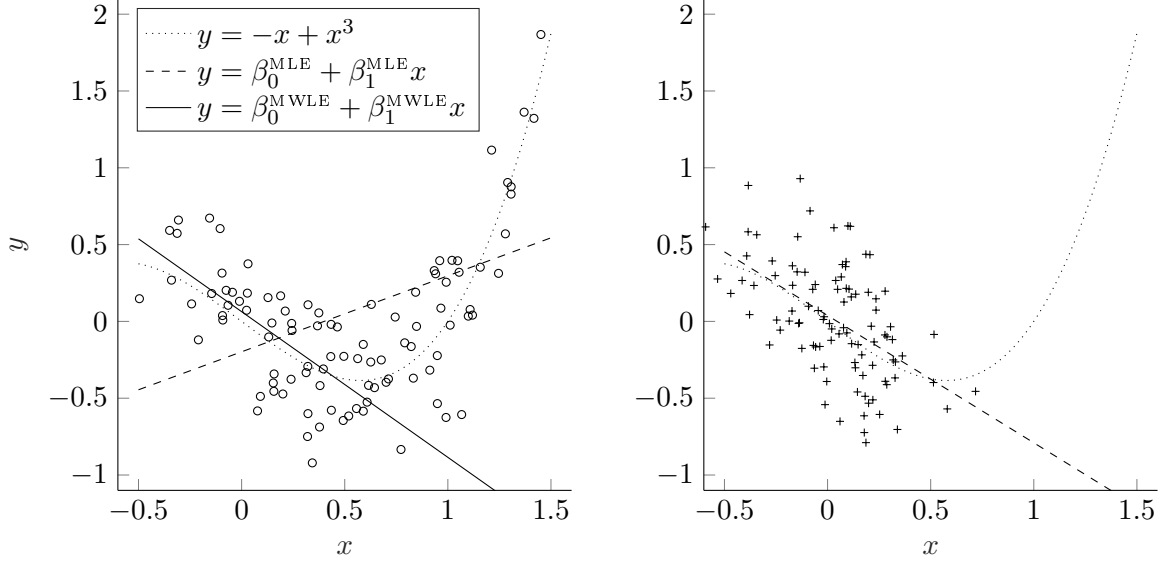
avec x l'entrée, distribuée selon $x \sim q_0 = \mathcal{N}(0.5, 0.5^2)$. Le modèle utilisé est mal spécifié puisqu'il est tronqué jusqu'à l'ordre 1,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (2.66)$$

Le modèle doit être performant au mieux pour des entrées distribuées selon $x \sim q_1 = \mathcal{N}(0, 0.3^2)$.

Cet exemple est illustré en figure 2.2, où l'on voit qu'avec l'estimateur MWLE en utilisant les observations avec les entrées distribuées selon q_0 , et en les pondérant par $w_k = \frac{q_1(x_k)}{q_0(x_k)}$, on obtient un résultat semblable à ce qui aurait été obtenu si on avait appliqué l'estimateur MV sur des observations avec des entrées distribuées selon q_1 . Ceci confirme bien le résultat de l'équation (2.63).

Les modèles négligent en général un certain nombre d'entrées et de dynamiques, que l'on considère alors comme des perturbations. De plus, il n'est pas toujours possible d'exciter un système exactement pour la distribution d'entrées qui nous intéresse. Le cas *misspecified model* et *covariate shift* apparaît donc souvent en pratique à des degrés plus ou moins importants.



(a) observations obtenues avec une distribution d'entrée $x \sim \mathcal{N}(0.5, 0.5^2)$.

(b) observations obtenues avec une distribution d'entrée $x \sim \mathcal{N}(0, 0.3^2)$.

FIGURE 2.2 – Illustration de l'estimateur MWLE.

2.5 Estimation de paramètres pour modèles dynamiques LTI

Les modèles dynamiques LTI (linéaire et invariant dans le temps) ont été introduits au premier chapitre. Dans le cadre de l'identification de modèle ou de l'estimation de paramètres, des mesures sont obtenues via une chaîne d'acquisition numérique. Elles consistent en un nombre fini d'échantillons pris à intervalles de temps réguliers. Pour pouvoir exploiter ces données dans un contexte d'identification, on utilise la version à temps discret du modèle. Pour la représentation d'état discrète, on exprime alors l'état du système à l'instant $k + 1$ en fonction de l'état et de l'entrée à l'instant k ,

$$x[k + 1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (2.67)$$

$$y[k] = C x[k] + D u[k], \quad (2.68)$$

que nous noterons de façon plus succincte

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.69)$$

$$y_k = C x_k + D u_k, \quad (2.70)$$

Un système à temps discret peut aussi être représenté par sa fonction de transfert, avec la transformée en Z ,

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.71)$$

ou de façon équivalente avec l'opérateur de décalage q ,

$$G(q) = \frac{N(q)}{D(q)}. \quad (2.72)$$

On obtient ainsi la réponse du modèle à l'instant k en fonction des réponses aux instants précédents et des entrées aux instants précédents et à l'instant k . C'est cette dernière représentation

que nous aborderons en premier, puisqu'elle permet de bien comprendre l'essence des modèles LTI et les différents types d'erreur possibles. Les autres modélisations ne sont que brièvement revues.

2.5.1 Représentation en fonction de transfert discrète

Modèles linéaires stochastiques

Les modèles stochastiques permettent une représentation qualitative des phénomènes [Nel01]. Afin de représenter des perturbations, des entrées non modélisées ou des dynamiques non modélisées, un bruit blanc η est injecté dans le modèle. Le filtrage de ce bruit blanc permet de façonner n'importe quel type de bruit (bloc intermédiaire entre η et la partie déterministe du modèle en figure 2.3). Certains modèles, notamment pour l'analyse de séries temporelles (*time-series*), n'ont pas d'autre entrée que ce bruit blanc. C'est le cas par exemple des modèles de type

- autorégressif (*AutoRegressive*, AR) ;
- autorégressif à moyenne ajustée (*AutoRegressive Moving Average*, ARMA).

En ajoutant à de tels modèle une entrée exogène u (*exogenous input*), suivant la structure et le type de filtrage, on obtient les modèles de type

- autorégressif avec entrée exogène (*AutoRegressive with eXogenous input*, ARX) ;
- autorégressif à moyenne ajustée avec entrée exogène (*AutoRegressive Moving Average with eXogenous input*, ARMAX) ;
- erreur de sortie (*Output Error*, OE) ;
- Box-Jenkins (BJ) ;
- filtre à réponse impulsionnelle finie (*Finite Input Response*, FIR).

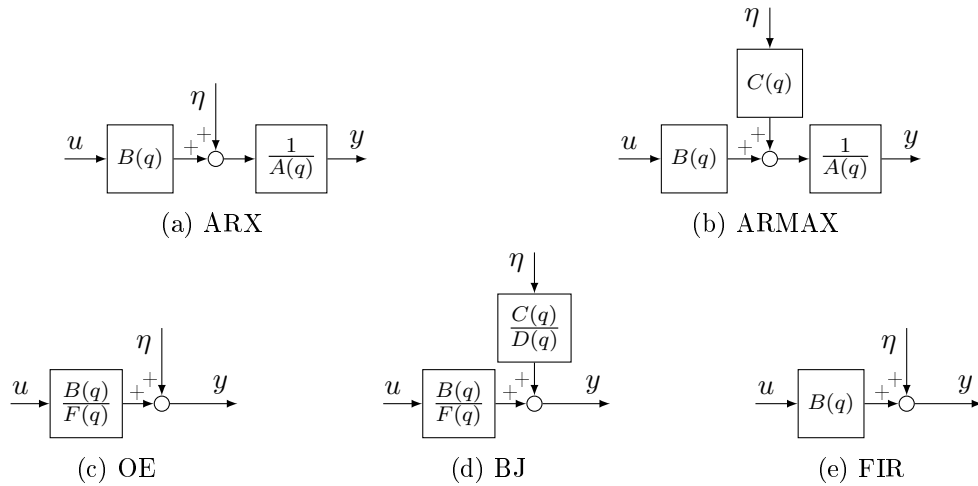
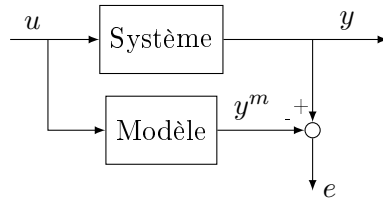


FIGURE 2.3 – Modèles linéaires courants.

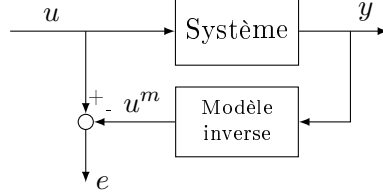
On distingue généralement deux catégories de modèles, suivant la façon dont le bruit entre dans le modèle : les modèles du type erreur d'équation (*equation error*) qui considèrent un bruit de processus (ARX, ARMAX) et les modèles du type erreur de sortie (*output error*) qui considèrent un bruit de mesure (OE, FIR) [DN97]. Ainsi, pour un modèle de type erreur d'équation, la sortie dépend des valeurs passées du bruit, ce qui n'est pas le cas pour un modèle de type erreur de sortie. Les structures usuelles sont détaillées en figure 2.3.

Modèles linéaires déterministes

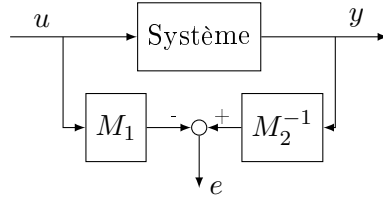
En pratique, pour prédire la sortie d'un système à partir d'un état initial et d'un signal d'entrée (simulation), ou pour estimer la sortie ou l'état du système à un instant donné connaissant des mesures (prédiction, filtrage, lissage), on se base uniquement sur la partie déterministe du modèle. En effet, il ne servirait à rien d'injecter un bruit artificiel qui serait décorrélié du bruit présent sur le vrai système (perturbations, dynamiques non modélisées ou approximées trop grossièrement). Ainsi, l'identification de modèles permettant de prédire la sortie du système consiste uniquement à identifier les coefficients des polynômes qui agissent sur la partie déterministe du modèle, donc $A(q)$, $B(q)$, $F(q)$. Afin d'estimer ces coefficients, on se ramène à un problème d'optimisation visant à minimiser une erreur. Cette erreur est considérée à l'endroit où l'on avait modélisé l'entrée du bruit dans le modèle. De cette façon, l'estimation des paramètres permet de faire en sorte que ce soit la partie déterministe du modèle qui explique le plus la sortie, tandis qu'une influence la plus minime possible est donnée à la partie stochastique (le bruit). Selon que le bruit est considéré en entrée, dans le processus, ou en sortie, on obtient différents concepts d'erreur présentés en figure 2.4 [rE71].



(a) erreur de sortie



(b) erreur d'entrée



(c) erreur généralisée

FIGURE 2.4 – Différents concepts d'erreur. Le type erreur d'équation est un cas particulier de l'erreur généralisée. Pour un modèle ARX, on a dans ce cas $M_1 = B(q)$ et $M_2^{-1} = A(q)$.

En général on cherche à minimiser le carré de l'erreur (donc la norme 2 de l'erreur). La fonction coût est alors

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_k^2(\theta). \quad (2.73)$$

Cette forme de fonction coût se justifie avec l'approche du maximum de vraisemblance dans le cas où le bruit blanc est gaussien (le raisonnement et les calculs sont similaires à ce qui est fait

aux paragraphes 2.4.1 et 2.4.2).

En pratique, on distingue souvent trois façons de construire l'erreur e : l'erreur de simulation (*simulation error*), l'erreur de prédiction (*prediction error*) ou un compromis entre les deux en considérant une erreur de prédiction sur plusieurs instants de temps (détaillée au paragraphe 2.6.2). Pour les modèles linéaires, les approches basées sur l'erreur de simulation et l'erreur de prédiction correspondent respectivement aux modélisations stochastiques du type erreur de sortie (*output error*) et erreur d'équation (*equation error*), présentées précédemment [TDH92].

Identification d'un modèle ARX (exemple d'un second ordre)

Dans un modèle ARX, on peut exprimer linéairement la sortie en fonction des sorties précédentes et des entrées précédentes et actuelle. Par exemple, pour un modèle du second ordre (l'ordre du polynôme $A(q)$ est l'ordre du modèle),

$$y_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k \quad (2.74)$$

$$y_k = \frac{\beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2}}{1 + \alpha_1 q^{-1} + \alpha_2 q^{-2}} u_k \quad (2.75)$$

$$y_k = -\alpha_1 y_{k-1} - \alpha_2 y_{k-2} + \beta_1 u_{k-1} + \beta_2 u_{k-2} \quad (2.76)$$

où q est l'opérateur de décalage $q : x_k \mapsto x_{k+1}$. L'opérateur q^{-k} permet donc d'utiliser les sorties et entrées passées.

En supposant que le modèle stochastique

$$y_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k + \frac{1}{A(q)} \eta_k, \quad \eta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2.77)$$

peut parfaitement représenter le système, alors le modèle déterministique

$$\hat{y}_k = \frac{\hat{B}(q)}{\hat{A}(q)} u_k \quad (2.78)$$

est optimisé en utilisant les mesures d'entrée et de sortie afin de minimiser l'erreur e , construite à l'emplacement du bruit blanc gaussien η , comme représenté en figure 2.5. L'erreur à l'instant k est

$$e(k) = y_k - \hat{y}_k \quad (2.79)$$

où la sortie du modèle est alors remplacée par (2.76), d'où l'appellation « erreur de prédiction ».

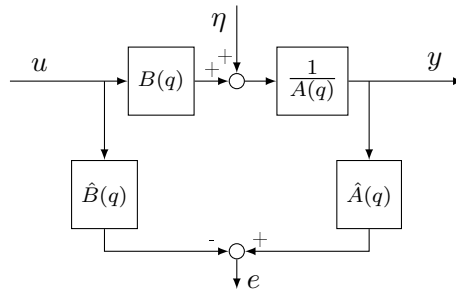


FIGURE 2.5 – Schéma d'identification de modèle de type ARX.

Pour un tel modèle, les paramètres apparaissent de façon linéaire. Il est donc aisé d'identifier $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ pour une minimisation de l'erreur de prédiction. Finalement, le problème est reformulé comme un problème d'optimisation linéaire où l'équation (2.76) est réécrite sous forme matricielle $Y = X\theta$ pour toutes les mesures disponibles :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & u_2 & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & -y_{N-2} & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix}}_X \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}}_{\theta}. \quad (2.80)$$

Et les paramètres sont obtenus par la solution qui minimise l'erreur des moindres carrés,

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} (Y - X\theta)^\top (Y - X\theta) \quad (2.81)$$

$$= (X^\top X)^{-1} X^\top Y. \quad (2.82)$$

Identification d'un modèle OE

Pour un modèle OE, l'erreur de prédiction est équivalente à l'erreur de simulation, puisque les sorties précédentes ne sont pas utilisées pour la prédiction,

$$\hat{y}_{k|k-1} = \hat{y}_k = \frac{\hat{B}(q)}{\hat{F}(q)} u_k. \quad (2.83)$$

où $\hat{y}_{k|k-1}$ désigne l'erreur faite en estimant la sortie à l'instant k connaissant les sorties jusqu'à l'instant $k - 1$ (c'est l'erreur de prédiction). $\hat{B}(q)$ et $\hat{F}(q)$ sont des polynômes en q , l'opérateur de décalage. L'erreur $e_k = y_k - \hat{y}_k$ dépend non-linéairement des paramètres. Par conséquent, on a recours à un algorithme d'optimisation non-linéaire pour résoudre le problème d'identification des coefficients du modèle.

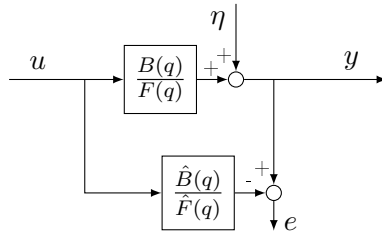


FIGURE 2.6 – Schéma d'identification de modèle de type OE.

Comparaison entre erreur de simulation et erreur de prédiction

Les deux exemples précédents permettent de comprendre comment l'hypothèse sur le bruit affecte l'estimation de paramètres. Rappelons que le bruit η permet de modéliser des entrées inconnues (perturbations), de compenser des dynamiques négligées ou une structure de modèle simplifiée (approximations dans les équations). Lors de l'estimation de paramètres, il est souhaitable que ce soit la partie déterministe du modèle qui explique le plus possible le fonctionnement du système, et que la partie stochastique ne soit là que pour expliquer une faible différence entre les mesures et la partie déterministe. Cela s'explique par le fait que c'est uniquement la partie

déterministe du modèle qui est utilisée lors d'applications, excepté dans de rares cas où l'on s'intéresse plus à l'aspect qualitatif que quantitatif. Pour que les mesures soient expliquées au maximum par la partie déterministe du modèle, la part des mesures expliquées par la partie stochastique doit être aussi faible que possible. Les paramètres sont donc estimés de façon à minimiser la part des mesures expliquées par le bruit η . Selon que ce bruit est modélisé en amont ou en aval du modèle, le bruit à l'instant k est influent uniquement sur la sortie du modèle à l'instant k (modèle de type erreur de sortie), ou également sur les sorties aux instants ultérieurs (le bruit est intégré dans le système, modèle de type erreur d'équation).

Dans le cas d'un modèle de type erreur de sortie, puisque l'hypothèse est faite que le bruit, qui représente ce qui n'est pas modélisé dans la partie déterministe, n'intervient que pour perturber le signal de sortie, alors tout ce qui est en amont est supposé correctement modélisé, et on minimisera l'erreur de simulation. C'est-à-dire que les équations de la partie déterministe du modèle sont intégrées de l'instant initial à l'instant final, en utilisant uniquement le signal d'entrée u , puis les sorties calculées $\hat{y}_k$ sont comparées aux mesures y_k pour construire l'erreur de simulation.

À l'inverse, dans un modèle du type erreur d'équation, l'erreur de prédiction à l'instant k est obtenue en comparant la sortie mesurée y_k à la sortie $\hat{y}_k$ calculée à partir des entrées mais également des sorties aux instants précédents. Par ailleurs, cette dernière approche a l'avantage d'exprimer l'erreur linéairement en fonction des paramètres.

2.5.2 Autres représentations

L'intérêt de passer en revue l'estimation de paramètres pour les modèles linéaires est, dans le cadre de cette thèse, de bien saisir la différence entre les notions d'erreur de prédiction et d'erreur de simulation. C'est pourquoi les différentes méthodes d'estimations pour modèles linéaires ne sont pas approfondies, mais seulement rapidement évoquées. Dans cette section, sont mentionnées les méthodes basées sur les fonctions de transfert en temps continu, et les représentations d'état.

Représentation par fonction de transfert à temps continu

La représentation par fonction de transfert à temps continu utilise la transformation de Laplace afin de représenter un modèle. C'est l'approche historiquement utilisée puisqu'elle se prête bien à travailler analytiquement sans outils informatiques. Elle est cependant limitée aux systèmes SISO (*Single-Input Single-Output*) et ne se généralise pas aux modèles non-linéaires comme la représentation d'état.

Représentation d'état

Sous forme de représentation d'état à temps continu (équations (1.4) et (1.5)) ou discret (équations (2.69) et (2.70)), les méthodes d'estimation diffèrent de l'approche par fonction de transfert. En effet, cette représentation introduit la variable d'état x , qui n'est pas directement mesurée. Pour faire une estimation de paramètres il est donc nécessaire d'obtenir d'abord une estimation de x , pour construire une erreur qui indique à quel point les équations du modèle sont en accord avec les mesures.

Pour cela, on peut à nouveau distinguer différents cas :

- on suppose tout le modèle correct, il y a uniquement des perturbations sur la sortie (sur l'équation (2.70)). Ceci mène à l'erreur de simulation où l'on simule le modèle à partir des entrées u afin d'obtenir la trajectoire du système $x_{1:N}$. Puis, l'erreur est construite en comparant les mesures y_k à la sortie du modèle $Cx_k + Du_k$.

- On suppose que l'équation (2.69) contient elle aussi un bruit qui représente l'insuffisance de la modélisation, alors on considèrera l'erreur de prédiction.
- Un compromis est également possible, en considérant des prédictions sur un horizon de plusieurs instants de temps.

Ces méthodes sont détaillées dans la section suivante puisqu'elles ont une architecture similaire pour les modèles linéaires et non-linéaires, et que nous sommes intéressés par le cas non-linéaire.

Notons que d'autres approches peuvent être employées : lorsque la structure du modèle est inconnue, la méthode des sous-espaces permet d'estimer l'ordre du système et une représentation d'état, à partir de mesures (cette approche concerne uniquement les systèmes linéaires). Par ailleurs, des modèles linéaires peuvent être utilisés pour approximer un système non-linéaire localement autour d'un point de fonctionnement. En utilisant une approche multi-modèle avec une méthode pour faire la transition d'un modèle linéaire local à un autre, on peut capturer le comportement du système.

2.6 Estimation de paramètres pour modèles dynamiques non-linéaires

Pour les modèles dynamiques non-linéaires, les problèmes mis en lumière précédemment sont toujours présents :

- l'estimateur MV (ou QMV ou MAP) ne permet pas une bonne estimation de paramètres lorsque le modèle est mal spécifié et qu'il doit être performant pour d'autres entrées que celles présentes sur les mesures ;
- différents types d'erreur peuvent être choisis, dépendant des hypothèses faites sur les incertitudes présentes sur le modèle : perturbation uniquement de la sortie, ou incertitude également sur la dynamique du modèle.

De plus, les techniques d'estimation pour modèles non-linéaires font face à des difficultés supplémentaires :

- les paramètres apparaissent généralement de façon non-linéaire dans les équations du modèle, ce qui mène ensuite nécessairement à un problème d'optimisation non-linéaire ;
- lorsque l'on travaille avec des densités de probabilité gaussiennes, faire passer une gaussienne dans une fonction non-linéaire ne retourne pas en sortie une autre gaussienne, alors que c'est le cas pour les fonctions linéaires. Ceci amène à faire des approximations dans les méthodes du type filtrage de Kalman.

Les modèles dynamiques non-linéaires peuvent être représentés sous une forme similaire à la fonction de transfert discrète, en exprimant la sortie à l'instant k en fonction des entrées et sorties précédentes [Lju10],

$$y_k = g(Z^{k-1}, \theta) \quad (2.84)$$

avec $Z^{k-1} = \{u_1, y_1, u_2, y_2, \dots, u_{k-1}, y_{k-1}\}$ et θ le vecteur de paramètres.

Les modèles dynamiques non-linéaires peuvent aussi être représentés en utilisant une variable d'état, à temps continu

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.85)$$

$$y = h(x, u) \quad (2.86)$$

ou discret

$$x_{k+1} = f_d(x_k, u_k) \quad (2.87)$$

$$y_k = h(x_k, u_k). \quad (2.88)$$

La relation entre les modélisations à temps continu et discret peut être observée en utilisant l'approximation d'Euler sur l'équation (2.85),

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} \approx f(x_k, u_k) \quad (2.89)$$

$$x_{k+1} \approx \underbrace{x_k + (t_{k+1} - t_k) f(x_k, u_k)}_{f_d(x_k, u_k)}. \quad (2.90)$$

ou encore la méthode de Heun ou la méthode de Runge-Kutta 4 (RK4). Ces méthodes font une meilleure approximation mais nécessitent respectivement 2 et 4 fois plus d'évaluations de la fonction f .

Il existe différentes techniques d'estimation de paramètres pour modèles dynamiques non-linéaires selon le type de modélisation considéré, les signaux mesurés, le type d'erreur utilisé (qui dépend de l'hypothèse sur les incertitudes du modèle). On distingue ici les méthodes selon qu'elles sont du type erreur de simulation, tirs multiples (méthode entre l'erreur de simulation et l'erreur de prédiction) et erreur de prédiction. Plusieurs techniques d'estimation de paramètres pour l'erreur de prédiction sont étudiées.

2.6.1 Erreur de simulation

L'approche par l'erreur de simulation, appelée *simulation error method* (SEM) ou encore *initial value method*, considère que le modèle est parfaitement capable de représenter le système, excepté pour un bruit sur le signal de mesure. Les équations du modèle sont intégrées à partir d'un état initial x_0 et pour un paramétrage θ (si x_0 est inconnu il peut être optimisé avec les paramètres). Ensuite l'erreur de simulation est obtenue en comparant les sorties $\hat{y}_{1:N}$ issues de cette simulation avec les mesures $y_{1:N}$ [Bar74, Ben79]. La sortie du modèle à un instant donné peut être un scalaire ou un vecteur. Dans le cas où y_k est un vecteur, l'utilisateur emploiera des techniques d'optimisation multicritère dont certaines sont décrites en section 2.8.1.

La variable d'état du modèle à l'instant t_k est obtenue en intégrant l'équation différentielle du modèle,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), \theta) \quad (2.91)$$

$$\int_0^{t_k} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt \quad (2.92)$$

$$[x(t)]_0^{t_k} = \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt \quad (2.93)$$

$$x_k - x_0 = \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt \quad (2.94)$$

$$x_k = x_0 + \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt \quad (2.95)$$

Ensuite l'équation de sortie permet de calculer

$$\hat{y}_k = h(x_k, u_k, \theta). \quad (2.96)$$

L'erreur de simulation est donc

$$e_k^{\text{sim}} = y_k - \hat{y}_k \quad (2.97)$$

$$= y_k - h(x_k, u_k, \theta) \quad (2.98)$$

$$= y_k - h\left(x_0 + \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt, u_k, \theta\right) \quad (2.99)$$

et la fonction coût à minimiser, en utilisant les moindres carrés, est

$$J(\theta) = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N (e_k^{\text{sim}})^2 \quad (2.100)$$

$$= \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (2.101)$$

$$= \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \left(y_k - h\left(x_0 + \int_0^{t_k} f(x(t), u(t), \theta) dt, u_k, \theta\right) \right)^2. \quad (2.102)$$

Si les entrées pour lesquelles le modèle est validé sont similaires à celles utilisées pour estimer les paramètres, et que le critère de validation est l'erreur quadratique moyenne (*Mean Square Error*, MSE), alors le modèle minimisant l'erreur de simulation donnera de meilleurs résultats que d'autres méthodes. En effet, minimiser l'erreur de simulation revient alors exactement à minimiser l'erreur quadratique, donc à minimiser le critère utilisé en validation.

Toutefois, cette méthode est critiquée pour sa tendance à exhiber de nombreux minimums locaux sur sa fonction coût ([Var82],[Hor01]). Ceux-ci sont dûs au fait que la trajectoire du modèle $x_{1:N}$ est très sensible à l'état initial x_0 et au paramétrage θ , ce qui peut, selon le modèle considéré et son excitation, faire complètement diverger la trajectoire du modèle par rapport à la trajectoire du système. Ensuite, dès lors que les deux trajectoires n'ont presque plus rien à voir entre elles, l'augmentation de l'erreur n'est plus corrélée à l'éloignement de θ de sa meilleure valeur possible. Ce problème est particulièrement accentué lorsque le système est instable, ou très sensible aux entrées ou aux paramètres. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes d'optimisation globales qui nécessitent un très grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Un autre inconvénient réside dans le fait que pour chaque évaluation de la fonction coût il faut effectuer une simulation temporelle du modèle, ce qui peut être coûteux en temps de calcul. Ces inconvénients pris conjointement – un nombre important d'évaluations et des évaluations coûteuses – tendent à rendre cette approche difficile à mettre en oeuvre dans certains cas, surtout si le nombre de paramètres (et donc la dimension de l'espace de recherche) est important.

2.6.2 Méthode des tirs multiples (*Multiple shooting method*)

La méthode de tirs multiples *multiple shooting* [VTk04, Hor01], consiste à estimer l'état du système à intervalles de temps réguliers et à simuler le modèle le long de chacun de ces intervalles. L'erreur construite entre la sortie du modèle et les mesures permet de construire une fonction coût. Les paramètres et les valeurs des états aux différents intervalles sont ensuite ajustés afin de minimiser cette fonction coût.

L'intervalle de temps $[t(1), t(N)]$ est partitionné en m sous-intervalles $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 1, \dots, m$. Une simulation du modèle est faite sur chacun des sous-intervalles à partir d'un état initial local $x_j = x(\tau_j)$. Une erreur de simulation est calculée sur chacun de ces sous-intervalles, permettant de construire la fonction coût minimisant les moindres carrés.

Cette approche est similaire à celle de l'erreur de simulation, mais elle permet de réduire le problème de la divergence de la trajectoire du modèle par rapport au système, en réinitialisant régulièrement la variable d'état. La fonction coût présente alors beaucoup moins de minimums locaux, facilitant ainsi la résolution du problème d'optimisation. Toutefois, la dimension du problème d'optimisation est augmentée, puisque l'approche par l'erreur de simulation (*initial value method*) doit estimer les paramètres et l'état initial, tandis que cette méthode doit estimer les paramètres et plusieurs états intermédiaires à partir desquels est relancée la simulation.

2.6.3 Erreur de prédiction, variable d'état mesurée

Dans le cas particulier où l'on mesure exactement tous les états, c'est-à-dire $y = x$, les équations (2.87) et (2.88) deviennent

$$y_{k+1} = f_d(y_k, u_k, \theta), \quad (2.103)$$

ou à temps continu

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), \theta). \quad (2.104)$$

Si des incertitudes sur le modèle sont modélisées par l'ajout d'un bruit gaussien à l'équation (2.103), l'équation devient

$$y_{k+1} = f_d(y_k, u_k, \theta) + \eta_k, \quad \eta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.105)$$

L'estimation de paramètres revient donc à satisfaire au mieux l'égalité (2.103). Ceci est fait en ajustant θ de façon à minimiser la part stochastique du modèle (comme expliqué dans le cas des modèles linéaires). L'application du principe du maximum de vraisemblance donne alors la fonction coût qui minimise les moindres carrés,

$$J(\theta) = \sum_{k=2}^N \frac{(y_k - \hat{y}_k(\theta))^2}{\sigma^2} \quad (2.106)$$

$$= \sum_{k=2}^N \frac{(y_k - f_d(y_{k-1}, u_{k-1}, \theta))^2}{\sigma^2}. \quad (2.107)$$

Une approche semblable mais utilisant le modèle à temps continu consiste à estimer la dérivée de l'état, puis à appliquer les moindres carrés pour minimiser l'erreur entre les termes de droite et de gauche de l'équation (2.104). Ces méthodes construisent une approximation non paramétrique de la trajectoire de y sur des bases de splines [Var82, PVM⁺06, Bru08, BG15]. Cette estimation de y permet ensuite d'estimer sa dérivée $\hat{y}$, que l'on compare à la valeur retournée par le modèle $f(y(t), u(t), \theta)$. Le vecteur de paramètres θ est alors optimisé pour minimiser cette erreur avec les moindres carrés [Var82] ou d'autres mesures [Bru08, BG15].

2.6.4 Erreur de prédiction, méthode du filtrage de Kalman avec vecteur d'état augmenté

Les méthodes du filtrage de Kalman (*Kalman filtering*, KF) [KB61] et du lissage de Rauch-Tung-Striebel (*RTS smoothing*) [RTS65] permettent d'estimer la trajectoire de l'état x d'un modèle dynamique linéaire sous forme de représentation d'état. Des techniques d'approximation permettent d'appliquer ces méthodes à des modèles dynamiques non-linéaires, comme par exemple le filtre de Kalman étendu (*Extended Kalman Filter*, EKF), le filtre particulaire ou encore le filtre de Kalman *unscented* (*Unscented Kalman Filtering*, UKF). La méthode d'estimation

de paramètres avec vecteur d'état augmenté (*augmented state vector*) consiste alors à concaténer le vecteur de paramètres θ et le vecteur d'état, de sorte que les paramètres seront estimés de la même façon que l'état. Pour cela, une loi d'évolution des paramètres doit être spécifiée, pour obtenir des valeurs qui restent à peu près constantes. Il suffit de spécifier

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_k, u_k, \theta_k) + \eta_k \\ \theta_k + \epsilon_k \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

avec ϵ un bruit blanc gaussien qui perturbe faiblement l'équation.

Ainsi les valeurs des paramètres varient dans le temps, mais pour un problème bien posé elles convergent généralement vers une constante.

La technique du lissage est détaillée en annexe B, avec l'algorithme général dans le cas de bruits gaussiens et l'algorithme appliqué en utilisant un cas particulier de lissage unscented : le lissage cubature (*Cubature Rauch-Tung-Striebel, RTS smooter*) [AH11]. Les techniques de lissage et de filtrage utilisent la forme stochastique du modèle, et les bruits sont supposés gaussiens et centrés,

$$x_{k+1} = f_d(x_k, u_k, \theta) + q_k \quad (2.109)$$

$$y_k = h(x_k, u_k, \theta) + r_k. \quad (2.110)$$

avec $q_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $r_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ les bruits de processus et de mesure (qui dépendent de la fréquence d'échantillonnage). Le modèle peut être réécrit sous la forme

$$x_{k+1} \sim \mathcal{N}(f_d(x_k, u_k, \theta), Q) \quad (2.111)$$

$$y_k \sim \mathcal{N}(h_d(x_k, u_k, \theta), R). \quad (2.112)$$

ou encore sous forme probabiliste

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k, u_k, \theta) \quad (2.113)$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k, u_k, \theta). \quad (2.114)$$

L'algorithme décrit en annexe B permet d'estimer $x_{1:N}$ à partir des mesures $y_{1:N}$ et $u_{1:N}$. La partie du vecteur d'état correspondant aux paramètres est ensuite récupérée pour identifier leurs valeurs. Toutefois, cette technique est peu employée lorsque toutes les mesures sont déjà connues. Elle est plutôt adoptée pour des applications en temps réel (*online*), en utilisant les équations du filtrage et non du lissage (*joint Kalman estimation*) [WVDM00]. Une autre technique proche est l'utilisation de deux filtres de Kalman interconnectés : l'un qui estime l'état et l'autre qui estime les paramètres (*dual Kalman estimation*) [WVDMN00].

2.6.5 Erreur de prédiction, méthode Espérance-Maximisation

La méthode Espérance-Maximisation (EM) utilise également les équations du lissage détaillées en annexe B. Tout comme les techniques de lissage et de filtrage, cette technique utilise l'inférence bayésienne, en considérant θ comme une variable aléatoire. Dans cette section, l'entrée u est omise pour alléger les équations, mais elle peut être ajoutée sans difficulté. En utilisant le théorème de Bayes, la distribution du vecteur de paramètres s'estime comme

$$p(\theta|y_{1:N}) = \frac{p(y_{1:N}|\theta)p(\theta)}{p(y_{1:N})} \quad (2.115)$$

$$\propto p(y_{1:N}|\theta)p(\theta) \quad (2.116)$$

Puisque l'objectif est d'obtenir des valeurs et non pas une distribution, un choix possible est celui fait par l'estimateur du maximum *a posteriori* de chercher la valeur ayant la plus forte probabilité,

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(\theta|y_{1:N}). \quad (2.117)$$

Puisque le dénominateur dans (2.115) ne dépend pas de θ , l'estimateur MAP est

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(y_{1:N}|\theta)p(\theta). \quad (2.118)$$

Cela correspond à maximiser la probabilité jointe des mesures et de l'*a priori* sur θ .

L'algorithme Espérance-Maximisation permet d'évaluer l'estimateur MAP en présence de variables latentes [DLR77]. Une variable latente est une variable intermédiaire qui affecte la sortie du modèle mais qui n'est pas mesurée. Dans une représentation d'état, l'état peut donc être vu comme une variable latente. L'algorithme EM estime itérativement les variables latentes pour des paramètres fixes (étape E) et les paramètres pour des variables latentes connues (étape M). Pour un modèle dynamique sous forme de représentation d'état, l'algorithme EM applique donc itérativement les deux étapes

étape E Estimation de la trajectoire de l'état $x_{1:N}$ pour un vecteur de paramètres donné θ . L'étape E consiste à effectuer un lissage pour un jeu de paramètres $\theta^{(j)}$ fixe, décrit en annexe B. Le lissage permet d'obtenir la trajectoire de l'état $p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta)$.

étape M Estimation du vecteur de paramètres θ pour une trajectoire d'état donnée $x_{1:N}$ en maximisant une borne inférieure de la distribution *a posteriori* du vecteur de paramètres. L'étape M consiste à résoudre le problème d'optimisation (2.118). En pratique une simple amélioration de θ à chaque itération suffit pour que l'algorithme converge. L'étape M est décrite en détails dans l'annexe C.

Pour des applications similaires de l'algorithme EM, voir [KSS14], [GN05], [Sch09], [SWN11].

Ici le cas d'un modèle non-linéaire est étudié, ce qui donne lieu à des approximations. Pour des modèles linéaires, les différentes quantités qui doivent être évaluées n'ont pas besoin d'être approximées : une expression analytique existe.

2.7 Identifiabilité

Avant de procéder à l'estimation des paramètres d'un modèle donné en utilisant un des algorithmes présentés précédemment, il est indispensable de s'assurer qu'il est possible de le faire ; on parle alors d'« identifiabilité ». Parmi l'ensemble de paramètres du modèle, on pourra alors sélectionner un sous-ensemble de paramètres identifiables, en fixant les autres à des valeurs nominales ou vraisemblables. L'identifiabilité permet de déterminer la possibilité d'estimer des paramètres. Intuitivement un ensemble de paramètres peut être identifié si l'influence de chacun des paramètres sur la sortie peut se distinguer de celle des autres paramètres. L'identifiabilité d'un ensemble de paramètres dépend

- de la structure du modèle ;
- des mesures ;
- du paramétrage initial si un algorithme d'optimisation locale est utilisé.

Une mise en défaut de l'identifiabilité causée par la structure du modèle est généralement due au sur-paramétrage du modèle, c'est-à-dire qu'il y a plusieurs solutions possibles au problème d'identifiabilité. Prenons comme exemple le modèle

$$y = \theta_1 \theta_2 x. \quad (2.119)$$

Ce modèle est sur-paramétré puisqu'il y a une infinité de combinaison des paramètres θ_1 et θ_2 qui donnent le même comportement entrée-sortie du modèle. L'étude d'identifiabilité en étudiant uniquement la structure du modèle est dite « identifiabilité *a priori* » (avant d'avoir utilisé les mesures) ou « identifiabilité structurelle » (*structural identifiability*).

Une mise en défaut de l'identifiabilité causée par les mesures indique que certains points de fonctionnement du modèle ne sont pas atteints et ne permettent donc pas d'identifier tous les paramètres. Pour illustrer ceci, prenons pour exemple le modèle

$$y = \min(\theta_1 x, \theta_2). \quad (2.120)$$

Si les mesures obtenues ne permettent pas d'atteindre la saturation, alors le paramètre θ_2 ne peut pas être mis en évidence. La question de savoir si les mesures permettent d'identifier les paramètres du modèle est appelée « identifiabilité *a posteriori* » (en anglais généralement *practical identifiability*).

Lorsqu'un algorithme d'optimisation locale est utilisé pour optimiser les paramètres, l'initialisation peut affecter l'identifiabilité du modèle. Reprenons l'exemple du modèle (2.120), la figure 2.7 montre les mesures obtenues, construites suivant l'équation $y_i = \min(\theta_1 x_i, \theta_2) + \mathcal{N}(0, 0.02)$ pour vingt valeurs x_i tirées de la distribution $\mathcal{N}(0.5, 0.25)$ et avec $(\theta_1, \theta_2) = (1, 0.5)$. Afin d'estimer les paramètres, plusieurs optimisations sont faites à partir d'initialisations différentes sur la fonction coût

$$J(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k=1}^{20} (y_k - \min(\theta_1 x, \theta_2))^2. \quad (2.121)$$

Suivant les conditions initiales, l'algorithme peut converger vers une valeur de θ_1 de sorte à ce

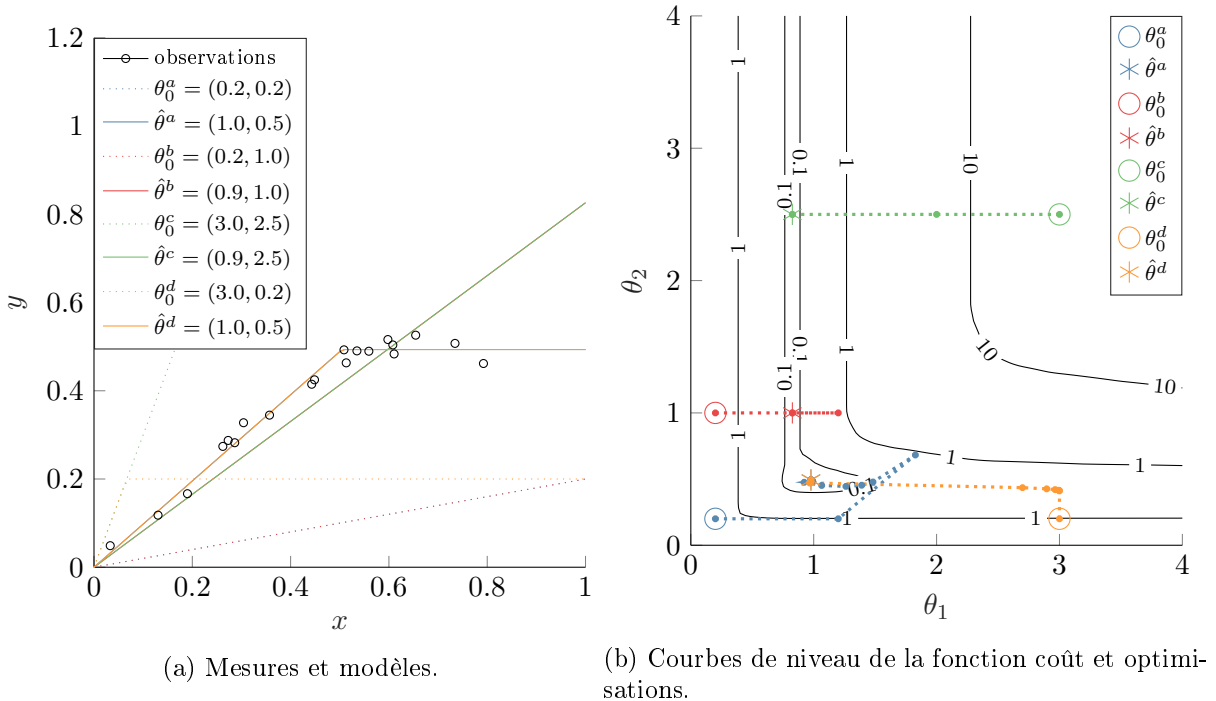


FIGURE 2.7 – Quatre optimisation des paramètres θ_1 et θ_2 du modèle $y = \min(\theta_1 x, \theta_2)$ avec la fonction *fminunc* de Matlab à partir d'initialisations différentes.

que le modèle soit une droite qui passe au mieux par toutes les mesures, tandis que la valeur

θ_2 de la saturation n'a pas d'influence. Dans cet exemple, il est donc plus judicieux d'initialiser avec une saturation θ_2 suffisamment faible pour que son influence soit non nulle et oriente l'optimisation vers le minimum proche de $(1, 0.5)$ (optimisations bleu et jaune). Les optimisations où l'initialisation se fait à une valeur trop élevée (optimisations rouge et verte) peuvent être vues comme des cas où les mesures sont insuffisantes puisque des mesures pour des valeurs de x très grandes permettraient de mettre en évidence la saturation.

La différence entre les deux notions d'identifiabilité peut être résumée ainsi : pour une structure de modèle donnée, l'identifiabilité *a priori* permet dans un premier temps de définir l'ensemble des paramètres identifiables théoriquement, puis l'identifiabilité *a posteriori* permet de définir l'ensemble des paramètres identifiables pour un jeu de mesures donné [Tho05].

2.7.1 Identifiabilité *a priori*

Différentes méthodes pour traiter l'identifiabilité structurelle sont présentées dans [WP97]. L'idée générale est de montrer, pour un modèle M et un ensemble de paramètres $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, que pour tout paramétrage θ ,

$$M(\theta) = M(\theta^*) \implies \theta = \theta^*. \quad (2.122)$$

Dans l'étude d'identifiabilité *a priori*, on suppose que le modèle est idéal, et par conséquent que la structure du modèle est celle du système, et que les mesures sont non bruitées et infiniment riches (les entrées peuvent être choisies sans restriction).

Modèles linéaires

L'identifiabilité structurelle de modèles linéaires consiste à supposer l'égalité entre $M(\theta)$ et $M(\theta^*)$, puis à identifier dans ces modèles différents termes qui doivent être égaux. On a alors un ensemble d'équations dont les paramètres θ sont les inconnues. S'il n'y a qu'une seule solution $\theta = \theta^*$ alors le modèle est identifiable *a priori* [Br70, WP97].

Pour les modèles sous forme de fonction de transfert, on écrira par exemple [WP97]

$$\frac{\theta_1}{s^2 + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)s + \theta_2\theta_3} = \frac{\theta_1^*}{s^2 + (\theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^*)s + \theta_2^*\theta_3^*} \quad (2.123)$$

on obtient un système d'équations avec la correspondance terme à terme,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1^* \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \theta_1^* + \theta_2^* + \theta_3^* \\ \theta_2\theta_3 &= \theta_2^*\theta_3^* \end{aligned} \quad (2.124)$$

ce qui, dans ce cas, mène à deux solutions possibles : $\theta = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*)$ et $\theta = (\theta_1^*, \theta_3^*, \theta_2^*)$, ce qui peut s'intuire puisque les paramètres θ_2^* et θ_3^* interviennent de façon symétrique dans le modèle.

Pour des modèles sous forme de représentation d'état (équations 1.4 et 1.5), la procédure de test d'identifiabilité *a priori* requiert d'étudier l'égalité des matrices de la représentation d'état à un changement de base près (et la condition initiale si elle dépend des paramètres) et de trouver les solutions pour θ et T vérifiant

$$\begin{aligned} A(\theta) &= TA(\theta^*)T^{-1} \\ B(\theta) &= BA(\theta^*) \\ C(\theta) &= C(\theta^*)T^{-1} \\ D(\theta) &= D(\theta^*) \\ x_0(\theta) &= Tx_0(\theta^*). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Modèles non-linéaires

Dans le cas de modèles non-linéaires de la forme (2.87), l'approche par série de Taylor cherche θ tel que les dérivées temporelles successives

$$a_k(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d^k}{dt^k} y(t, \theta) \quad (2.126)$$

soient identiques pour θ et θ^* , jusqu'à k valant l'ordre du système.

Une autre méthode pour les modèles non-linéaires est la méthode de similarité, qui étend la méthode appliquée à la représentation d'état aux modèles non-linéaires [VGR89]. Cette méthode est assez complexe, excepté pour les cas où le modèle non-linéaire est, en fait, un modèle polynomial en fonction de l'état.

2.7.2 Identifiabilité *a posteriori*

L'identifiabilité *a posteriori* (en anglais souvent appelé *practical identifiability*) est le cas pratique d'identification à partir de mesures. Il existe de nombreuses méthodes permettant de sélectionner un sous-espace de paramètres identifiables à partir d'un jeu de mesures. Plusieurs de ces méthodes sont décrites dans [MXPW11] et [OO13]. Dans cette thèse, nous utiliserons une méthode proche de celles décrites dans les thèses [Tho05] et [Alb15], et dans les travaux de [BRK01]. Cette méthode a également des points communs avec les méthodes *structured covariance analysis* et *orthogonal method* présentées respectivement dans [OO13] et [MXPW11].

Le modèle $M(\theta)$ est par définition *a posteriori* localement identifiable en $\theta^* \in \Theta$ à partir des entrées $u(t)$, $t \in \{t_1, \dots, N\}$ s'il existe un voisinage $V(\theta^*)$ de θ^* tel que $\forall \theta \in V(\theta^*)$,

$$y(t_k, \theta) = y(t_k, \theta^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, N\} \implies \theta = \theta^* \quad (2.127)$$

Pour étudier l'identifiabilité *a posteriori*, localement autour de θ^* , on se base sur la fonction de sensibilité de la sortie y par rapport au paramètre θ_i ,

$$s_{y/\theta_i}(t) = \left. \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta^*}. \quad (2.128)$$

Afin d'avoir différentes fonctions de sensibilités qui soient comparables, on les rend adimensionnelles en les multipliant par $\Delta\theta_i$, un écart représentatif des valeurs possibles du paramètre θ_i , et en divisant par Δy , un écart représentatif des valeurs de sortie (par exemple l'écart-type). La fonction de sensibilité normalisée obtenue est

$$\tilde{s}_{y/\theta_i}(t, \theta^*) = \left. \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta^*} \frac{\Delta\theta_i}{\Delta y}. \quad (2.129)$$

La matrice de sensibilité normalisée pour la sortie y est définie comme

$$\tilde{S}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{y/\theta_1}(t_1, \theta^*) & \cdots & \tilde{s}_{y/\theta_d}(t_1, \theta^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_{y/\theta_1}(t_N, \theta^*) & \cdots & \tilde{s}_{y/\theta_d}(t_N, \theta^*) \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

avec d le nombre de paramètres.

En général, lorsque plusieurs sorties sont présentes, les équations restent identiques avec $y(t, \theta)$, Δy et $\tilde{s}_{y/\theta_i}(\theta^*)$ des vecteurs.

Pour assurer l'identifiabilité *a posteriori* locale, nous cherchons à montrer que $\tilde{S}_y$ est de rang plein. En effet, pour un vecteur $\theta \in V(\theta^*)$, notons $d\theta = \theta - \theta^*$, nous avons l'approximation

$$y(t_k, \theta) = y(t_k, \theta^*) + \sum_{i=1}^d \left. \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta^*} d\theta_i + o(d\theta) \quad (2.131)$$

$$\approx y(t_k, \theta^*) + S_y(\theta^*) d\theta. \quad (2.132)$$

En se replaçant dans le contexte de (2.128), si $y(t_k, \theta) = y(t_k, \theta^*)$, alors $S_y(\theta^*) d\theta = 0$, et en utilisant la matrice normalisée, cela devient $\tilde{S}_y(\theta^*)(d\theta \odot 1/\Delta\theta) = 0$ avec le symbole $\odot$ décrivant la multiplication terme à terme de deux vecteurs. Pour que l'implication

$$\tilde{S}_y(\theta^*)(d\theta \odot 1/\Delta\theta) = 0 \implies d\theta = 0 \quad (2.133)$$

soit vérifiée, il faut $\ker \tilde{S}_y(\theta^*) = 0$, c'est-à-dire $\tilde{S}_y(\theta^*)$ de rang plein ($\text{rg} \tilde{S}_y(\theta^*) = d$). Afin de quantifier de combien une matrice est proche d'être singulière (pas de rang plein) on examine son conditionnement. Le conditionnement d'une matrice A , en se basant sur la norme euclidienne, est

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \quad (2.134)$$

avec $\sigma_{\max}(A)$ et $\sigma_{\min}(A)$ respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A . Dans notre cas, on cherche à sélectionner un sous-ensemble des paramètres candidats qui soit localement identifiable, c'est-à-dire qui aura une valeur $\kappa(\tilde{S}_y(\theta^*))$ raisonnable (typiquement, [BRK01] recommande de choisir un seuil à ne pas dépasser entre 30 et 100).

Une alternative au conditionnement comme critère pour juger de l'identifiabilité est l'indice de colinéarité [BRK01, Tho05]

$$\gamma(\tilde{S}_y(\theta^*)) = \frac{1}{\sigma_{\min}(\tilde{S}_y(\theta^*))} \quad (2.135)$$

qui a une interprétation intéressante (valable dans l'approximation linéaire) : un décalage dans la valeur d'un paramètre entraîne un changement de la sortie. Un ajustement des autres paramètres peut ramener ce changement de la sortie à $1/\gamma$ fois sa valeur. Par exemple, un indice de colinéarité $\gamma = 20$ indique qu'un changement d'un des paramètres entraînera un changement sur la sortie, qui peut être ramené à 5% de sa valeur en ajustant les autres paramètres. Ce critère donne des résultats similaires au critère de conditionnement tant que les colonnes de $\tilde{S}_y(\theta^*)$ sont suffisamment orthogonales. D'après [BRK01], un choix de seuil pour la valeur maximale de γ admissible est typiquement entre 5 et 20. Les deux critères sont liés par l'inégalité [BRK01]

$$\gamma \leq \kappa \leq \sqrt{d} \gamma. \quad (2.136)$$

Ainsi, si l'on souhaite utiliser le critère conditionnement κ tout en gardant à l'esprit l'interprétation de l'indice de colinéarité, on pourra choisir un seuil pour κ entre 5 et $20\sqrt{d}$.

Pour choisir l'ensemble de paramètres identifiables, [BRK01] propose de calculer un ensemble d'indicateurs sur les colonnes de $\tilde{S}_y(\theta^*)$ (norme 1, norme 2, moyenne, valeurs extrêmes) et de sélectionner les 20 paramètres qui semblent les plus influents d'après ces indicateurs. Ensuite on calcule l'indice de colinéarité pour chacun des sous-ensembles de ces paramètres et l'on retient le sous-ensemble qui semble le plus approprié parmi les sous-ensembles de paramètres pour lesquels l'indice de colinéarité est sous le seuil critique.

Dans [Alb15] une méthode similaire est employée mais utilise le conditionnement de $\tilde{S}_y(\theta^*)$ (ou de façon semblable le conditionnement de l'information de Fisher $\tilde{S}_y(\theta^*)^\top \tilde{S}_y(\theta^*)$) comme

critère, au lieu de l'indice de colinéarité. La normalisation de la matrice de sensibilité est donnée cette fois comme suit :

$$\tilde{s}_{y/\theta_i}(t, \theta^*) = \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta_i} \bigg|_{\theta^*} \frac{\theta_i^*}{\|y(t, \theta)\|_1} \quad (2.137)$$

Dans [Tho05], l'auteure utilise l'indice de colinéarité sur une matrice de sensibilité non normalisée, avec une intéressante méthode itérative de sélection des paramètres. L'ensemble des paramètres retenus comprend comme premier élément le paramètre le plus influent (colonne de $S_y(\theta^*)$ dont la norme 2 est la plus importante). Puis, des paramètres sont itérativement ajoutés de façon à ce que la matrice de sensibilité des paramètres précédemment retenus, associés au nouveau paramètre, ait un indice de colinéarité le plus faible possible. Des paramètres peuvent ainsi être ajoutés jusqu'à ce que le seuil de l'indice de colinéarité soit atteint.

Méthode retenue dans la thèse

L'approche retenue dans cette thèse se base sur la méthode itérative de [Tho05] mais utilise comme critère le conditionnement plutôt que l'indice de colinéarité, et avec la normalisation de la matrice de sensibilité (2.129) décrite dans [BRK01]. Les étapes de cette méthode sont :

1. Sélectionner un ensemble de paramètres candidats Θ .
2. Sélectionner le paramètre le plus influent (mesuré par la norme 2) comme premier élément de l'ensemble des paramètres retenus,

$$\theta_1 = \arg \max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{S}_y(\theta)\|_2. \quad (2.138)$$

3. Itérativement, ajouter des paramètres supplémentaires à l'ensemble des paramètres retenus, de sorte que la matrice de sensibilité des paramètres précédemment retenus associée au nouveau paramètre ait un conditionnement le plus faible possible. Le j -ième paramètre à ajouter à l'ensemble retenu est obtenu comme

$$\theta_j = \arg \min_{\theta \in \Theta \setminus \{\theta_1, \dots, \theta_{j-1}\}} \kappa(\tilde{S}_y(\theta)). \quad (2.139)$$

2.8 Algorithmes d'optimisation

Toutes les méthodes d'estimation de paramètres présentées dans les sections précédentes s'appuient sur l'optimisation d'un critère. Généralement, ce critère est non-linéaire en les paramètres, et il n'est pas nécessairement scalaire. Cette section passe en revue quelques outils pour l'optimisation non-linéaire et multi-critère (*nonlinear multi-objective optimization*).

2.8.1 Optimisation multi-critère

Il existe différentes approches pour solutionner un problème d'optimisation multi-critère et le choix de l'approche dépend notamment des informations disponibles et des préférences de l'utilisateur [MA04]. La forme générale d'un problème d'optimisation multi-critère est

$$\arg \min_{\theta \in \Theta} J(\theta) \quad (2.140)$$

avec $J(\theta)$ un vecteur ayant pour composantes $J_i(\theta), i \in \{1, \dots, p\}$. Dans le cas de l'estimation de paramètres d'un modèle, cela peut par exemple correspondre au cas où le modèle a différentes sorties (*multi-output model*).

Front de Pareto

Un concept fondamental en optimisation multicritère est l'optimalité de Pareto (ou optimalité de Pareto forte). Un point $\theta^* \in \Theta$ est optimum de Pareto si et seulement si $\nexists \theta \in \Theta$ tel que $J(x) \leq J(\theta^*)$ et $\exists i$ tel que $J_i(x) < J_i(\theta^*)$. Un point est donc un minimum de Pareto s'il n'y a pas d'autre point qui permet d'améliorer au moins une fonction coût sans en pénaliser une autre. L'ensemble des points qui vérifient la définition de l'optimalité de Pareto forment le front de Pareto.

Or, puisque nous souhaitons obtenir un modèle avec un unique paramétrage et non pas un ensemble de paramétrages, il faut définir parmi les solutions possibles laquelle choisir. Dans [MA04], différentes méthodes sont passées en revue et sont classées selon que l'utilisateur définisse ses préférences *a priori*, *a posteriori*, ou pas du tout. Les méthodes adoptant la définition de préférences *a posteriori* ont un fort coût de calcul puisqu'elles cherchent à obtenir plusieurs solutions appartenant au front de Pareto, afin que l'utilisateur puisse ensuite choisir celle qui convient le mieux. Les méthodes ne nécessitant pas de décision de l'utilisateur sont souvent des simplifications des méthodes où l'utilisateur fait un choix *a priori*. Nous préférons ici les méthodes avec choix *a priori*, qui permettent d'apporter plus d'information (la préférence de l'utilisateur) sans pour autant pénaliser le coût de calcul. Ces méthodes permettent de synthétiser les différentes fonctions coût $J_i(\theta)$ en une seule fonction coût scalaire $J_U(\theta)$ (*scalarization into a utility function*) dont la structure et les paramètres traduisent les choix de l'utilisateur.

Normalisation des fonctions coût

Avant toute chose, il est recommandé de préalablement transformer les fonctions coût $J_i(\theta)$ afin d'avoir une cohérence entre les différentes fonctions coût, par exemple si elles ont différentes unités. Différentes approches possibles sont présentées dans [MA04], qui s'appuient sur les concepts de valeur utopique et maximum :

- Une valeur utopique $J^\circ(\theta)$ de la fonction coût est définie par

$$\forall i, J_i^\circ = \min_{\theta} J_i(\theta). \quad (2.141)$$

En pratique, une telle valeur est rarement atteignable et il faut faire un compromis entre les différentes composantes de J .

- Les valeurs maximum sont définies comme

$$J_i^{\max} = \max_j J_i(x_j^*) \quad (2.142)$$

avec x_j^* le point qui minimise $J_j(\theta)$.

Les différentes transformations présentées dans [MA04] sont

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{J_i(\theta)}{|J_i^{\max}|} \quad (2.143) \qquad \tilde{J}_i(\theta) = \frac{J_i(\theta) - J_i^\circ}{J_i^\circ} \quad (2.144)$$

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{J_i(\theta)}{J_i^\circ}, \quad J_i^\circ > 0 \quad (2.145) \qquad \tilde{J}_i(\theta) = \frac{J_i(\theta) - J_i^\circ}{J_i^{\max} - J_i^\circ}. \quad (2.146)$$

L'inconvénient de ces transformations est qu'elles nécessitent d'optimiser chacune des fonctions coût $J_i(\theta)$ afin de calculer les valeurs utopique et minimum. Une alternative qui permet d'éviter ces optimisations intermédiaires est d'appliquer une normalisation similaire à ce que est fait dans l'analyse d'identifiabilité via l'équation (2.129). Ceci ne fonctionne que dans le cas où chaque sortie permet d'obtenir un ensemble de mesures, par exemple dans le cas de systèmes dynamiques

avec des mesures dans le temps. Les fonctions coût non normalisées sont généralement construites avec la racine de l'erreur quadratique moyenne (*RMSE*, *Root Mean Square Error*),

$$J_i(\theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2} = \|y^i - \hat{y}^i\|_2 \quad (2.147)$$

avec y_k^i la k -ième mesure sur la i -ème sortie du système et $\hat{y}_k^i$ la k -ième valeur sur la i -ème sortie du modèle.

Différentes normalisations de la fonction coût sont envisageables :

- RMSE de l'erreur relative,

$$\tilde{J}_i(\theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{y_k^i - \hat{y}_k^i}{y_k^i} \right)^2} = \left\| \frac{y^i - \hat{y}^i}{y^i} \right\|_2. \quad (2.148)$$

Critique : une mesure nulle entraîne une erreur infinie.

- Normalisation par l'énergie du signal de mesure,

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i)^2}} = \frac{\|y^i - \hat{y}^i\|_2}{\|y^i\|_2}. \quad (2.149)$$

Critique : la valeur de la fonction coût n'est pas uniquement dépendante de l'écart relatif entre y^i et $\hat{y}^i$ mais également des valeurs absolues de ces signaux (l'écart de y_i par rapport à 0).

- Normalisation par l'écart-type du signal de mesure,

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \bar{y}^i)^2}} = \frac{\|y^i - \hat{y}^i\|_2}{\sigma(y^i)}. \quad (2.150)$$

- Normalisation par la moyenne,

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i)} = \frac{\|y^i - \hat{y}^i\|_2}{\bar{y}^i}. \quad (2.151)$$

Critique : une moyenne nulle entraîne une erreur infinie. De plus différents signaux ayant une même moyenne ont une même normalisation sans tenir compte de leur amplitude.

- Normalisation par l'étendue,

$$\tilde{J}_i(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2}}{\max_k(y_k^i) - \min_k(y_k^i)} = \frac{\|y^i - \hat{y}^i\|_2}{\max_k(y_k^i) - \min_k(y_k^i)}. \quad (2.152)$$

Critique : deux signaux ayant la même étendue mais dont un varie beaucoup tandis que l'autre reste plus souvent à sa valeur moyenne ont une même normalisation, or on pourrait « accepter » plus d'erreur sur un signal qui varie beaucoup que sur un signal qui varie peu.

Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons une optimisation basée sur la normalisation par l'écart-type du signal de mesure que l'on appellera NRMSE (*Normalized Root Mean Square Error*). Cette normalisation permet d'avoir une invariance de la fonction coût par transformation linéaire des sorties. De plus, c'est la racine de la fonction coût que l'on obtient avec l'estimateur du maximum de vraisemblance pour un bruit gaussien (2.107). Dans la suite, on suppose que la normalisation est faite et $\tilde{J}$ est simplement noté J .

Méthodes de scalarisation avec préférence *a priori*

L'utilisateur traduit ses préférences *a priori* dans un vecteur de poids $w = (w_1, \dots, w_p)$ dont les composantes sont associées à chaque fonction coût $J_1, \dots, J_p$. Différents choix de méthodes sont possibles [MA04], quelques-unes sont décrites ici :

- Le critère global pondéré (*weighted global criterion*)

$$J_U(\theta) = \left(\sum_{i=1}^p w_i (J_i(\theta))^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.153)$$

- La somme pondérée

$$J_U(\theta) = \sum_{i=1}^p w_i J_i(\theta) \quad (2.154)$$

- La méthode lexicographique, utilisant un ordre d'importance entre les fonctions coût. Celles-ci sont ordonnées par ordre décroissant d'importance. Les fonctions coût sont itérativement optimisées avec comme contrainte qu'elles ne doivent pas pénaliser les fonctions coût préalablement optimisées. Il y a donc p problèmes d'optimisation à résoudre, dont le i -ième problème est

$$\min_{\theta} J_i(\theta) \quad (2.155a)$$

$$\text{tel que } J_j(\theta) \leq J_j(\theta_j^*), \forall j \in \{1, \dots, i-1\}, i > 1 \quad (2.155b)$$

- La méthode min-max, qui minimise la fonction coût la plus éloignée de sa valeur utopique, avec une pondération pour indiquer les préférences,

$$J_U = \max_i \{w_i (J_i(\theta) - J_i^\circ)\}. \quad (2.156)$$

Cette équation peut être améliorée (*augmented weighted Tchebycheff method*) en

$$J_U = \max_i \{w_i (J_i(\theta) - J_i^\circ)\} + \rho \sum_{j=1}^p J_j(\theta) - J_j^\circ \quad (2.157)$$

avec ρ une valeur faible généralement comprise entre 0.0001 et 0.01. Cette amélioration permet de garantir la convergence vers un optimum de Pareto.

Toutes ces méthodes permettent d'obtenir des optimaux de Pareto ; différents optimaux sont obtenus en sélectionnant différentes méthodes et différentes pondérations. De plus, la méthode lexicographique et la méthode min-max améliorée permettent d'atteindre tous les points du front de Pareto en variant la pondération et le paramètre ρ . Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons le critère global pondéré avec $p = 2$.

2.8.2 Algorithmes d'optimisation directe non-linéaire

Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation adaptées à différents cas d'utilisation. Nous nous concentrons ici sur les méthodes directes pour optimiser une fonction coût non-linéaire, avec possiblement des contraintes d'inégalité non-linéaires. L'adjectif « directe » signifie que l'optimisation est faite sans évaluation analytique du gradient ou du hessien de la fonction coût (*derivative-free nonlinear optimization* ou *direct search blackbox optimization*). Le problème d'optimisation s'écrit

$$\arg \max_{g_i(\theta) \leq 0, \forall i} J(\theta) \quad (2.158)$$

Certains auteurs ont comparé les performances de nombreux algorithmes sur différents exemples types (*benchmark*) afin d'en dégager des tendances générales [RS13]. Toutefois, ces résultats doivent être examinés en gardant à l'esprit que ces bibliothèques d'exemples types ne sont pas nécessairement représentatives des problèmes rencontrés en pratique [Aud14].

Puisqu'une fonction coût non-linéaire peut présenter plusieurs minimums locaux, l'idéal est d'utiliser un algorithme d'optimisation globale. Les algorithmes d'optimisation métaheuristique répondent à ce besoin. Ces algorithmes sont généralement stochastiques, ils poursuivent d'un côté une exploration de l'espace de recherche (diversification), et de l'autre ils améliorent l'optimum trouvé à partir des évaluations précédentes (intensification) [Yan11]. Parmi ces méthodes on peut notamment citer celle du recuit simulé, les algorithmes génétiques, les algorithmes à évolution différentielle (par exemple CMA-ES [Han16]), l'algorithme *Cuckoo Search*, etc. D'autres techniques comme l'algorithme *Multilevel Coordinate Search* [HN99] ou SID-PSM [CV08] (dérivé des méthodes de type *pattern search*) semblent également performantes dans le comparatif de [RS13]. Toutefois, du fait de la partie exploratoire de ces algorithmes, ils effectuent un très grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Dans le cadre de l'application industrielle de cette thèse, ces méthodes s'avèreront trop coûteuses en nombre d'évaluations – et donc en temps de calcul – c'est pourquoi nous nous concentrerons sur des méthodes d'optimisation locale, au risque de n'atteindre qu'un minimum local.

Seules deux méthodes éprouvées sont présentées ici et utilisées dans la suite ; elles ont été choisies comme un compromis entre performance attendue (d'après la littérature sur des *benchmarks* et d'après leur degré d'utilisation) et facilité de mise en oeuvre (fonctions déjà implémentées et documentées).

Algorithme de Nelder-Mead

L'algorithme d'optimisation locale du simplexe de Nelder-Mead est historiquement un algorithme très utilisé pour l'optimisation de fonctions non-linéaires [Por17]. L'algorithme est décrit dans [LRWW98]. Il utilise un simplexe qui est une figure à $n + 1$ points dans un espace à n points (généralisation du triangle). Ce simplexe est initialisé dans l'espace de recherche, et la fonction coût est évaluée en ses sommets. Selon les valeurs obtenues, différentes formules sont utilisées afin de calculer l'emplacement de nouveaux sommets. Un nouveau simplexe est alors obtenu et la fonction coût est évaluée pour les nouveaux sommets, puis ce résultat permet d'évoluer vers un autre simplexe, etc. L'algorithme est construit de sorte que d'une étape à une autre le « meilleur » sommet (ayant la plus faible valeur de la fonction coût) soit gardé, et que le plus « mauvais » sommet soit abandonné. Cet algorithme est garanti de converger vers le minimum pour une fonction coût strictement convexe à une dimension. Pour un espace de recherche à plusieurs dimensions il n'existe pas de preuve de convergence ; il existe au contraire des contre-exemples. Pourtant, cet algorithme a été adopté dans de nombreuses disciplines appliquées puisqu'il est généralement assez performant sur des problèmes pratiques ; c'est d'ailleurs l'algorithme implémenté dans la fonction *fminsearch* du logiciel Matlab. Il existe de nombreuses variantes qui tentent d'améliorer les performances de l'algorithme, la recherche est toujours active à ce sujet [PT18, GH12, FBP19, Meh20, Wes19]. L'algorithme de Nelder-Mead ne prend pas en compte les contraintes, mais elles peuvent être incorporées en utilisant un terme pénalisant la fonction coût quand elle transgresse les contraintes (*penalty term*).

Algorithme d'optimisation quadratique successive

L'algorithme d'optimisation quadratique successive (*Sequential Quadratic Programming, SQP*) résoud un problème d'optimisation locale en lui substituant une suite de problèmes d'optimisation d'une fonction quadratique, construite pour approximer la fonction coût au point actuel de l'espace de recherche. Pour cela, il est nécessaire de connaître le gradient et le hessien de la fonction coût. Le gradient peut être approximé par des différences finies, et le hessien est estimé. Selon la dimension de l'espace de recherche, l'approximation par différences finies peut s'avérer coûteuse, mais la meilleure direction de recherche prise par l'algorithme peut compenser ce coût. C'est le cas en particulier si l'approximation de la fonction coût au second ordre faite par l'algorithme est suffisamment représentative de la fonction coût. La méthode d'optimisation quadratique successive utilise la méthode Quasi-Newton avec la méthode *active-set* pour incorporer les contraintes d'inégalité.

La méthode Quasi-Newton cherche à imiter la méthode de Newton qui minimise successivement les approximations au second ordre en utilisant la connaissance du gradient ∇J et de la matrice hessienne H par les itérations successives

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{1}{H(\theta_k)} \nabla J(\theta_k). \quad (2.159)$$

L'algorithme de Quasi-Newton sans contraintes utilise une estimation B de la matrice hessienne H . Une possibilité pour cela est la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [Cul94, NW06] qui utilise l'estimation B_k , la différence des gradients $\gamma_k = \nabla J(\theta_{k+1}) - \nabla J(\theta_k)$ et la différence des points $\delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ pour obtenir l'estimation B_{k+1} ,

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\gamma_k \gamma_k^\top}{\gamma_k^\top \delta_k} - \frac{B_k \delta_k \delta_k^\top B_k}{\delta_k^\top B_k \delta_k} \quad (2.160)$$

ou directement l'estimation S de l'inverse de la matrice hessienne,

$$S_{k+1} = S_k + \left(1 + \frac{\gamma_k^\top S_k \gamma_k}{\delta_k^\top \gamma_k}\right) \frac{\delta_k \delta_k^\top}{\delta_k^\top \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^\top S_k + S_k \gamma_k \delta_k^\top}{\delta_k^\top \gamma_k}. \quad (2.161)$$

Dans l'algorithme d'optimisation quadratique successive, les contraintes d'inégalité sont prises en compte par des multiplicateurs de Lagrange qui sont introduits dans la fonction coût afin de respecter les conditions de Karush-Kuhn-Tucker [Cul94]. Dans le sous-problème d'optimisation quadratique, l'estimation de l'ensemble des contraintes actives permet de maintenir la recherche d'un meilleur point tout en respectant les contraintes [NW06]. La fonction *fmincon* de Matlab avec l'option *active-set* ou *sqp* est une implémentation de cette méthode [mat7a].

2.9 Conclusion

Différentes techniques d'estimation de paramètres ont été passées en revue, pour différents problèmes : l'estimation de paramètres d'une distribution, d'une fonction statique, d'un modèle dynamique linéaire, d'un modèle dynamique non-linéaire. La section sur l'inférence statistique, qui ne traite que l'estimation des paramètres d'une distribution, a permis d'expliquer les approches du maximum de vraisemblance et du maximum *a posteriori*, et de les lier à des notions de théorie de l'information. Elle a permis également de s'intéresser au problème des modèles mal spécifiés. Le problème d'estimation des paramètres d'un modèle statique a ensuite mis en lumière la difficulté qui apparaît lorsque le problème est mal spécifié et qu'il doit être performant sur

des entrées différentes de celles utilisées pour l'estimation. Ce problème n'est plus abordé sur les modèles dynamiques, mais nous y reviendrons au chapitre suivant. L'estimation de paramètres pour modèles LTI a permis d'introduire le lien entre le modèle stochastique d'un système et l'erreur utilisée pour estimer ses paramètres. Puis la section sur l'estimation de paramètres pour modèles dynamiques non-linéaires a discuté des différents choix d'erreur possibles et a introduit le filtrage et le lissage, ainsi que l'algorithme EM. Une méthode d'identifiabilité a ensuite été donnée, qui devra s'appliquer au début du processus d'estimation de paramètres afin de sélectionner le sous-ensemble de paramètres le plus pertinent à identifier. Enfin, une présentation des algorithmes d'optimisation utilisés a été donnée.

3

Méthodes de recalage appliquées à des modèles de véhicules

Sommaire

3.1	Introduction	73
3.2	Identification directe du modèle pneu avec l'estimation de ses entrées-sorties	74
3.2.1	Description de la méthode	74
3.2.2	Application à l'exemple du modèle bicyclette non-linéaire	76
3.3	Développement d'une méthode de pondération dans le cas de dynamiques inégalement excitées	78
3.3.1	Motivation	78
3.3.2	Calcul des coefficients de pondération w_k	81
3.3.3	Méthodes d'estimation utilisant la pondération	83
3.4	Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures de l'état	84
3.4.1	Description et configuration des méthodes d'identification	84
3.4.2	Résultats	86
3.5	Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures d'accélération latérale	88
3.5.1	Description et configuration des méthodes d'identification	89
3.5.2	Résultats	89
3.6	Conclusion	91

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons le problème posé lorsque les observations sont obtenues de façon inégale sur les différentes dynamiques du système. Ce problème apparaît lors de l'identification de modèles de dynamique du véhicule, puisque lors d'essais, ou même de simulations, le véhicule est bien plus souvent en ligne droite, ou stabilisé en virage, que dans des situations transitoires ou des situations extrêmes avec de fortes vitesses de lacet ou de fortes dérives. Pour adresser ce problème, nous développons une nouvelle approche, qui consiste à pondérer les échantillons en utilisant la méthode d'erreur de prédiction ou l'algorithme EM. La structure du modèle est définie *a priori*, de même que les mesures sont réalisées *a priori*, et l'objectif est alors d'estimer des paramètres qui permettent au mieux d'approximer le système.

Cette approche, ainsi que toutes les approches étudiées au chapitre 2, sont appliquées à l'estimation des rigidités de dérive avant et arrière d'un modèle bicyclette non-linéaire. Nous n'utilisons pas de vraies mesures, mais des données obtenues sur une simulation d'un modèle implémenté dans le logiciel CarMaker. Ce cas d'étude relativement simple permet de facilement mettre en avant les avantages et inconvénients des différentes méthodes. Plusieurs cas sont considérés selon que tous les signaux sont disponibles, que seules les variables d'état sont disponibles, et finalement que seule une mesure bruitée de l'accélération latérale est disponible (en plus des entrées que sont l'angle volant et la vitesse longitudinale).

Dans la littérature, l'estimation de paramètres de modèles simples de dynamique du véhicule concerne plutôt des modèles linéaires. Différentes approches sont employées : les méthodes d'erreur de prédiction [AÜKÇ08] et d'erreur de simulation [Sch99] pour une estimation de paramètres à partir de données enregistrées, et les méthodes de filtrage de Kalman unscented et étendu avec état augmenté [BB16, BB18] pour des applications en ligne. Ces applications considèrent généralement que les accélérations et la vitesse de lacet sont mesurées, et parfois également que la dérive ou la vitesse latérale est mesurée.

Ce chapitre est organisé ainsi : tout d'abord le cas de l'estimation des paramètres du modèle pneu lorsque tous les signaux sont disponibles est abordé. L'identification des paramètres dans ce cas-là pourra se faire en évaluant uniquement le modèle pneu. Ceci nous mènera à une discussion sur la pondération des différents points de fonctionnement, qui sera ensuite poursuivie dans la section suivante, où nous introduirons la méthode de pondération proposée. Par la suite, cette méthode sera comparée aux méthodes vues au chapitre 2, tout d'abord lorsque l'état est entièrement mesuré, puis lorsque seule la mesure de l'accélération latérale est disponible.

3.2 Identification directe du modèle pneu avec l'estimation de ses entrées-sorties

3.2.1 Description de la méthode

Puisque nous cherchons à estimer les paramètres du sous-modèle pneu, une approche possible est de s'intéresser directement aux entrées et sorties de ce sous-modèle (figure 3.1). Si suffisamment de signaux sont mesurés, il est possible d'estimer ses entrées-sorties en utilisant les équations du modèle. Cette méthode n'a pas été évoquée au chapitre 2 car elle n'est pas généralisable à tous les problèmes d'identification de paramètres de modèle, mais elle correspond à la structure d'erreur généralisée décrite à la figure 2.4c (page 52) avec la particularité que les entrées et sorties du sous-modèle ne dépendent pas des paramètres à estimer. Ainsi, l'optimisation est réalisée en évaluant uniquement le sous-modèle de pneu. Nous utilisons ici le modèle bicyclette

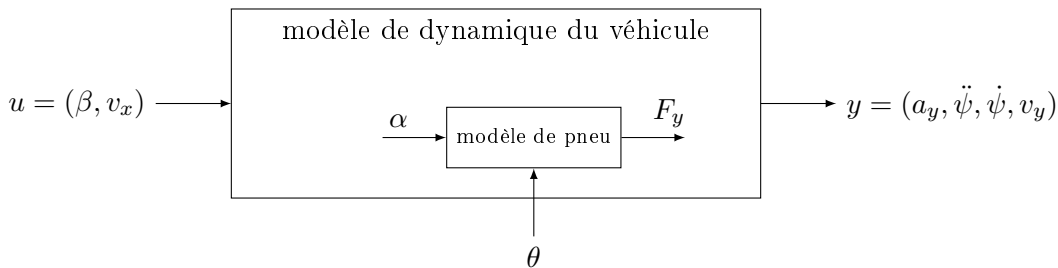


FIGURE 3.1 – Schéma représentant le modèle de pneumatique comme un sous-modèle du modèle véhicule.

non-linéaire décrit à la section 1.4.1, dont les équations sont rappelées ici :

$$ma_y = F_{y,f} + F_{y,r} \quad (3.1)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = l_f F_{y,f} - l_r F_{y,r}. \quad (3.2)$$

La relation $a_y = \dot{v}_y + \dot{\psi}v_x$ permet d'obtenir les équations sous la forme $\dot{x} = f(x, u)$ avec x l'état $(v_y, \dot{\psi})$. Les forces latérales générées par les pneus avant et arrière, $F_{y,f}$ et $F_{y,r}$, sont obtenues par l'équation non-linéaire (version simplifiée du modèle de Pacejka),

$$F_{y,i} = 2\mu F_{z,i} \sin \left(C \arctan \left(\frac{K_i}{C\mu F_{z,i}} \alpha_i \right) \right), \quad i \in \{f, r\} \quad (3.3)$$

avec $F_{z,f}$ et $F_{z,r}$ les charges statiques à l'avant et à l'arrière, exprimées par

$$F_{z,f} = \frac{l_r}{l_f + l_r} mg \quad \text{et} \quad F_{z,r} = \frac{l_f}{l_f + l_r} mg. \quad (3.4)$$

Les dérivées aux pneus avant et arrière sont obtenues à partir des états et de l'angle volant :

$$\alpha_f = \frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x} - r_{\text{steer}} \beta \quad \text{et} \quad \alpha_r = \frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x}. \quad (3.5)$$

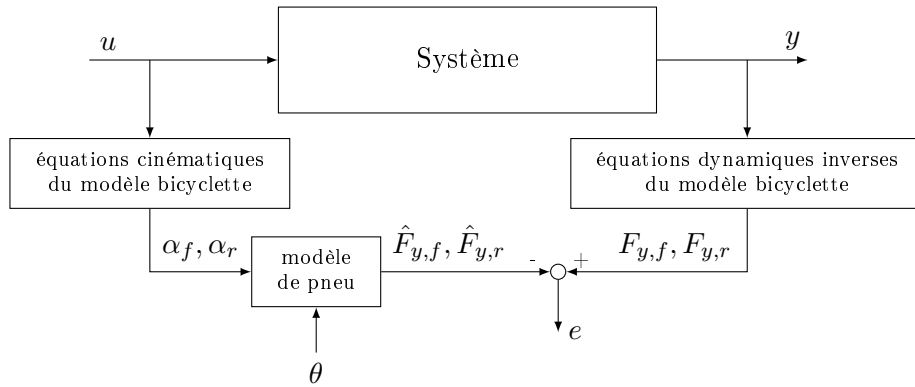


FIGURE 3.2 – Structure similaire à l'erreur généralisée pour l'estimation des paramètres du modèle pneu.

L'optimisation des paramètres du modèle pneu peut alors se faire en deux étapes (figure 3.2) :

- à partir des mesures de $v_y, \dot{\psi}, v_x, \beta$, on estime les dérivées α_f, α_r (3.5). À partir des mesures de $a_y, \ddot{\psi}$, on estime les efforts $F_{y,f}, F_{y,r}$ avec les équations (3.1) et (3.2),

$$F_{y,f} = \frac{l_r ma_y + I_{zz} \ddot{\psi}}{l_f + l_r} \quad \text{et} \quad F_{y,r} = \frac{l_f ma_y - I_{zz} \ddot{\psi}}{l_f + l_r}. \quad (3.6)$$

- À partir des estimations de $\alpha_f, \alpha_r, F_{y,f}, F_{y,r}$, on identifie indépendamment les coefficients des modèles pneu avant et arrière en résolvant les problèmes d'optimisation suivants

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_f &= \arg \min_{\theta} \|F_{y,f} - f_{\text{pneu}}(\alpha_f, \theta)\|_2 \\ \hat{\theta}_r &= \arg \min_{\theta} \|F_{y,r} - f_{\text{pneu}}(\alpha_r, \theta)\|_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'optimisation peut être faite en donnant autant d'importance à tous les échantillons, ou bien en donnant autant d'importance à tous les points de fonctionnement (ici la valeur des dérivées avant et arrière).

3.2.2 Application à l'exemple du modèle bicyclette non-linéaire

Cette méthode est appliquée au recalage des paramètres de rigidité de dérive K_f et K_r , avec les autres paramètres fixés aux valeurs du tableau 3.1. Les données de référence sont obtenues par une simulation réalisée avec un modèle détaillé de dynamique du véhicule dans le simulateur CarMaker. Les données sont obtenues en simulant une manœuvre où le véhicule roule à 80 km/h (22.2 m/s) en ligne droite, puis l'angle volant suit une rampe pour atteindre 90 degrés en 0.5 secondes, puis cet angle volant est maintenu pendant 9 secondes (figure 3.3). L'angle volant et la vitesse longitudinale sont utilisés comme des entrées du modèle bicyclette non-linéaire.

paramètre	valeur
l_f	0.97
l_r	1.56
m	1463
I_{zz}	1967
r_{steer}	0.05
μ	1
C	1.4

TABLE 3.1 – Paramètres du modèle bicyclette non-linéaire.

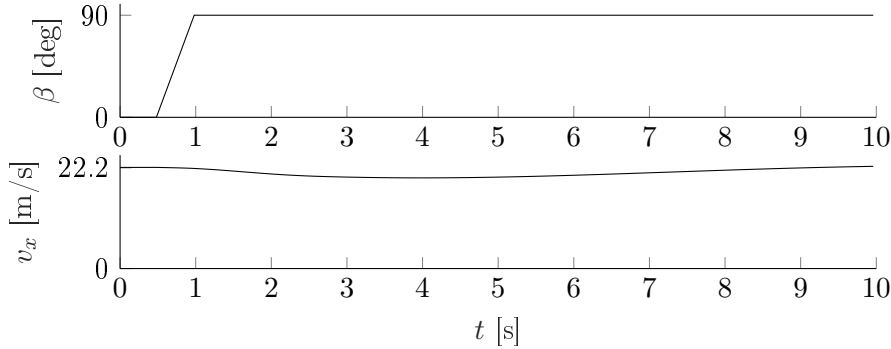


FIGURE 3.3 – Angle volant et vitesse longitudinale utilisés comme entrées du modèle bicyclette non-linéaire.

Les rigidités de dérive K_f et K_r sont optimisées avec l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead [LRWW98] (fonction *fminsearch* de Matlab). Les deux variantes, en pondérant de façon équitable tous les échantillons et en pondérant de façon équitable les différents points de fonctionnement du modèle de pneu (différentes valeurs de dérive), sont mises en œuvre. Les paramétrages obtenus sont notés respectivement $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}_w$, les modèles de pneu obtenus sont présentés en figure 3.4. Pour obtenir $\hat{\theta}_w$, une pondération est appliquée et les fonctions coût sont alors

$$J_f = \sqrt{\sum_{k=1}^N w_{f,k} (F_{y,f,k} - f_{\text{pneu}}(\alpha_{f,k}, \theta))^2} \quad (3.8)$$

$$J_r = \sqrt{\sum_{k=1}^N w_{r,k} (F_{y,r,k} - f_{\text{pneu}}(\alpha_{r,k}, \theta))^2} \quad (3.9)$$

où les pondérations w_f et w_r sont construites en divisant l'intervalle comprenant la dérive avant ou arrière en dix morceaux (choix empirique après avoir examiné les données). Puis les N_i échantillons du i -ème morceau sont pondérés par $\frac{N}{10N_i}$ avec N le nombre total d'échantillons.

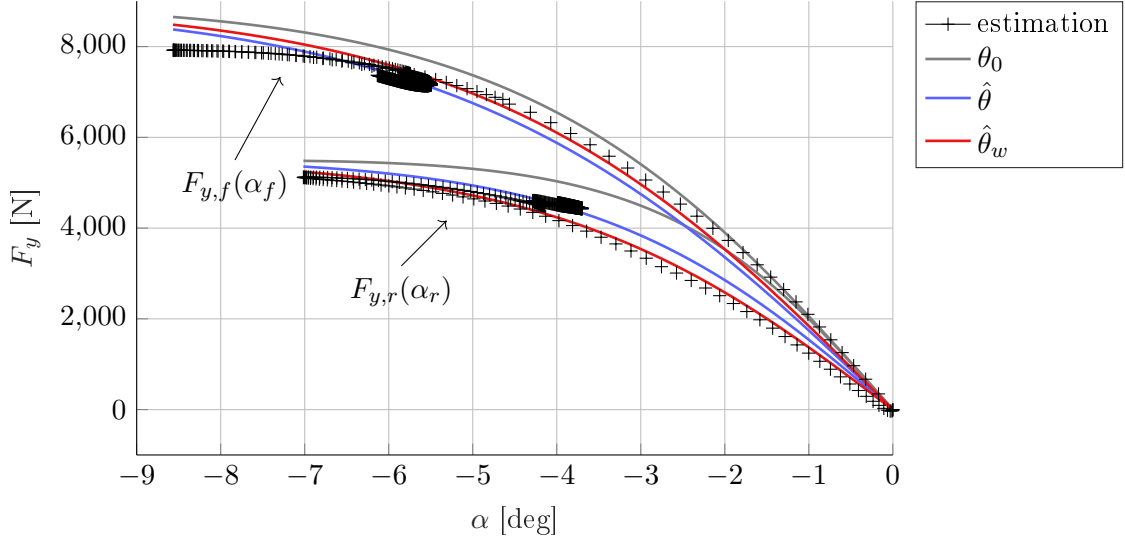


FIGURE 3.4 – Dérives et forces latérales estimées à partir des mesures et de l'équation (3.6), et courbe caractéristique du modèle de pneu avec les paramétrages initial θ_0 et optimisés sur l'intervalle des dérivées estimées.

À la figure 3.4, on remarque sur la courbe caractéristique du pneu arrière que la méthode pondérant équitablement les différents échantillons permet de bien approximer le point de fonctionnement où sont présents un nombre élevé d'échantillons, tandis que la méthode pondérant équitablement les différentes valeurs de dérive permet de mieux capturer la pente à l'origine.

Les résultats de simulation du modèle bicyclette avec les paramétrages θ_0 , $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}_w$ sont donnés en figure 3.5 et 3.6 pour les entrées (β, v_x) obtenues lors de la manœuvre utilisée pour identifier les paramètres. On peut remarquer à partir de ces résultats de simulation que le paramétrage $\hat{\theta}$ permet d'atteindre un régime permanent très proche de la référence, tandis que le paramétrage $\hat{\theta}_w$ permet de mieux approximer le régime transitoire et reste proche de la référence dans l'espace d'état. Ceci s'explique puisqu'un nombre important d'échantillons correspond au régime permanent, le paramétrage $\hat{\theta}$ tendra donc à mieux représenter cette partie de la manœuvre. Au contraire, le régime transitoire permet de solliciter des dynamiques différentes, c'est-à-dire des points de fonctionnement variés, donc des valeurs de dérive variées. Or le paramétrage $\hat{\theta}_w$ essaie d'approximer au mieux les différentes dynamiques ; il sera donc plus performant sur cette partie-ci de la manœuvre.

En figure 3.8, des simulations sont également effectuées sur une manœuvre de validation dont les entrées sont données en figure 3.7. Cette manœuvre est typique des essais de dynamique du véhicule, avec un nombre important de mesures sur des points de fonctionnement similaires. Elle permet donc de mettre en exergue la différence entre les deux approches (avec et sans pondération). Les résultats en figure 3.5 et 3.6 montrent que le paramétrage $\hat{\theta}_w$ approxime très bien la référence pour de faibles angles et lors des transitoires.

Cette première méthode nous a permis d'explorer une approche peu commune car non générale, mais qui s'applique bien à notre cas d'estimation des paramètres d'un modèle de pneu. Elle nécessite toutefois de mesurer de nombreux signaux. Pour un modèle de dynamique du véhicule

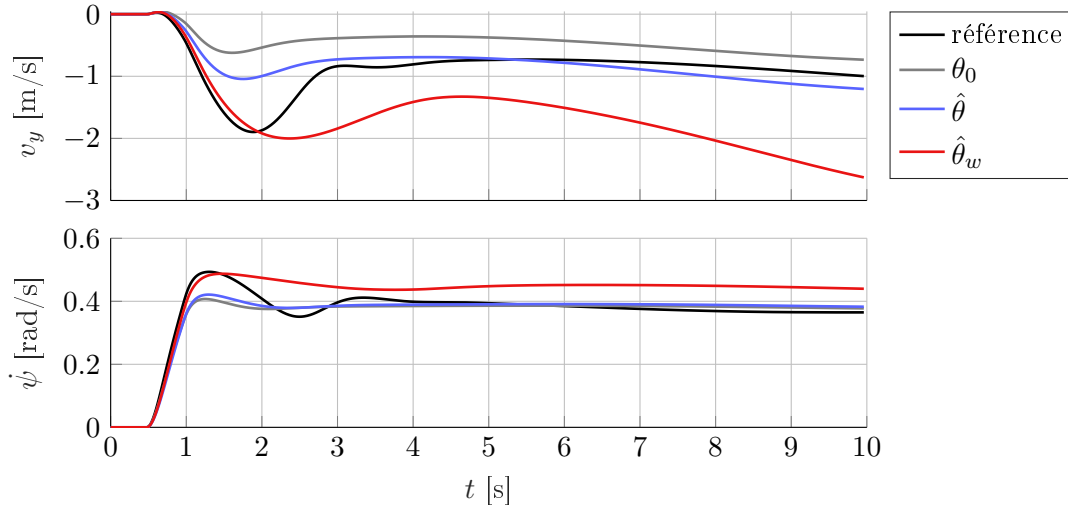


FIGURE 3.5 – Simulations avec les paramètres identifiés, examinées en fonction du temps.

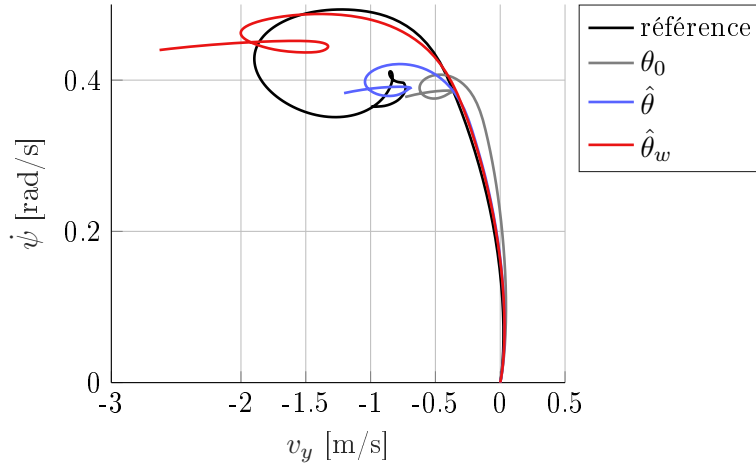


FIGURE 3.6 – Simulations avec les paramètres identifiés, examinées dans l'espace d'état.

plus poussé il serait nécessaire d'estimer ou de mesurer toutes les entrées et sorties du modèle de pneu, ce qui est fait dans [ABJB19]. Dans la suite de ce chapitre nous considérons ce même problème d'estimation de paramètres en appliquant les méthodes détaillées au chapitre 2, mais en restreignant le nombre de variables connues.

3.3 Développement d'une méthode de pondération dans le cas de dynamiques inégalement excitées

3.3.1 Motivation

Compromis dans l'estimation. L'exemple précédent a mis en évidence que dans le cas où les mesures sont irrégulièrement réparties sur les différents points de fonctionnement et que le modèle n'est pas capable de bien approximer le système sur l'ensemble des mesures (*model misspecification*), l'estimateur sera amené à faire un compromis. Ce compromis peut être ajusté

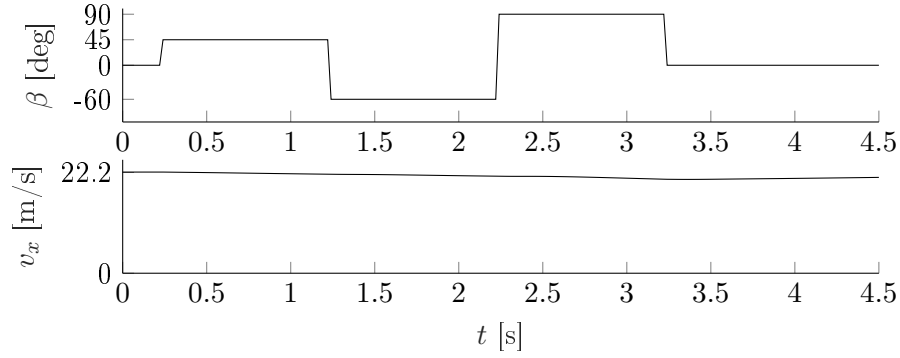


FIGURE 3.7 – Angle volant et vitesse longitudinale pour la manœuvre de validation.

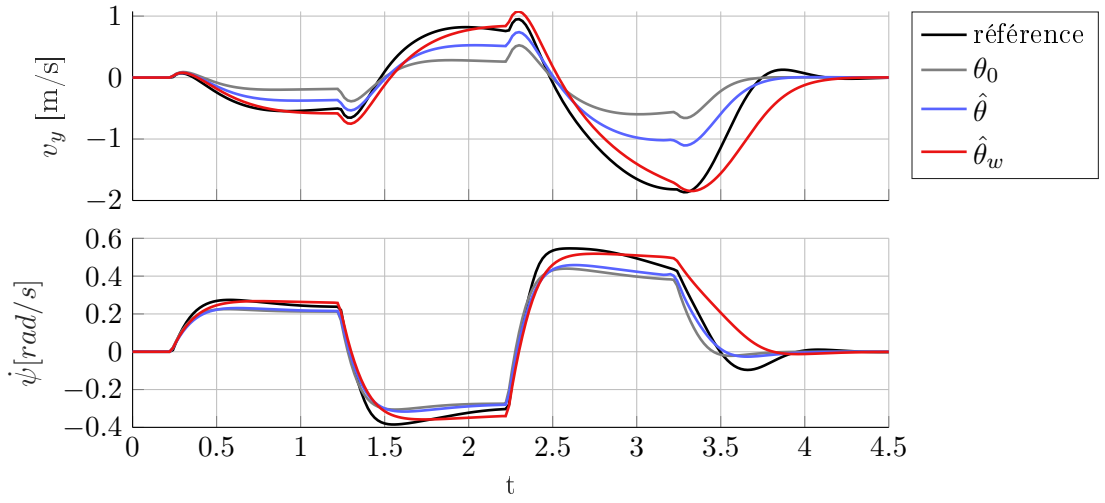


FIGURE 3.8 – Simulations de validation avec les paramètres identifiés, examinés en fonction du temps.

en pondérant les différents échantillons lors de l'optimisation. Ainsi dans l'exemple précédent, une pondération a permis d'obtenir un paramétrage des pneus avant et arrière moyennement performant pour toutes les valeurs de dérive.

Dynamiques d'un système et mauvaise spécification. Nous interprétons le terme courant « une dynamique d'un système » comme une région ou une dimension de l'espace d'état. Dans un modèle mal spécifié (*misspecified model*) des entrées ou des dynamiques sont négligées (non modélisées), ou des dynamiques sont mal modélisées (*functional form misspecification*). Une dynamique négligée correspond donc à des variables d'états qui auraient pu améliorer la modélisation mais qui n'ont pas été prises en compte, tandis que des dynamiques mal modélisées correspondent à des équations $\dot{x} = f(x)$ simplifiées qui ne peuvent décrire qu'approximativement le comportement du système. Ici on ne s'intéresse pas au problème d'entrées négligées, mais uniquement aux dynamiques mal ou non modélisées.

Erreurs entre modèle et système. Tandis qu'un bruit de mesure i.i.d. entraîne une erreur entre le modèle et le système également distribuée sur tous les échantillons, ce n'est pas le cas

de l'erreur due à la mauvaise spécification du modèle. Dans le cas de dynamiques mal modélisées, l'erreur est fonction du point de fonctionnement, tandis que dans le cas de dynamiques non-modélisées l'erreur est généralement corrélée, jusqu'à un certain point, aux entrées et aux états modélisés, donc également au point de fonctionnement du modèle.

Limitations de l'approche sans pondération. Ne pas appliquer de pondération revient à accorder autant d'importance aux différents échantillons. Si le modèle est capable de bien approximer le système et que l'erreur entre le modèle et le système est principalement due au bruit de mesure (i.i.d. sur les différents échantillons) alors accorder autant d'importance à tous les échantillons est bien l'approche à suivre. En général, les mesures sont échantillonnées à intervalle de temps régulier. Ne pas pondérer revient alors implicitement à accorder autant d'importance à tous les instants de temps. Or, lorsqu'une partie de l'erreur entre le système et le modèle est due à des dynamiques non modélisées et que les mesures sont inégalement réparties sur différents points de fonctionnement, le paramétrage obtenu par l'estimateur sans pondération donne un modèle performant aux points de fonctionnements comprenant un nombre important d'échantillons, mais ce modèle est une mauvaise approximation des dynamiques pour lesquelles peu d'échantillons sont obtenus.

Approximation du comportement du système. Nous proposons d'essayer d'approximer au mieux le comportement du système à partir des échantillons. La notion de comportement provient de [PW97] et a été évoquée au paragraphe 1.3.1 : le comportement d'un système correspond à l'ensemble des signaux compatibles avec les lois qui le gouvernent. Dans notre cas, le modèle est décrit par les équations

$$\dot{x} = f(x, u, \theta) \quad (3.10)$$

$$y = h(x, u, \theta). \quad (3.11)$$

Nous cherchons donc à estimer θ pour que les fonctions (3.10) et (3.11) soient une bonne approximation du système pour les différentes valeurs d'échantillons observées (pour les différentes dynamiques). On cherche donc à obtenir un portrait de phase du système qui soit aussi compatible que possible avec les observations faites sur le système, pas en moyenne sur les différents échantillons, mais en moyenne sur les différentes régions de l'espace d'entrée-état. Or, si les échantillons sont inégalement répartis sur l'espace d'entrée-état ces deux objectifs sont différents. Et pour poursuivre l'objectif d'une approximation en moyenne sur les différentes régions de l'espace d'état, il est nécessaire d'introduire une pondération.

Lien avec [Shi00] L'approche proposée est très semblable à celle discutée dans [Shi00] et évoquée au paragraphe 2.4.3. La différence étant que nous nous intéressons à des modèles dynamiques et que nous n'avons pas d'expressions de la distribution des entrées (et des états) qui ont permis d'obtenir les observations. Nous ne pouvons donc pas calculer de pondération comme un quotient de ces distributions comme dans la méthode MWLE. Toutefois, des poids empiriques peuvent tout de même être élaborés de sorte à pouvoir obtenir un modèle qui approxime bien le système sur différentes dynamiques alors que les échantillons sont inégalement répartis sur l'espace entrée-état avec certaines régions très riches et d'autres très pauvres en échantillons. La pondération de [Shi00] est

$$w_k = \frac{q_1(u_k)}{q_0(u_k)} \quad (3.12)$$

avec q_0 et q_1 respectivement la distribution des entrées utilisées pour l'estimation de paramètres et la distribution des entrées pour lesquelles on souhaite un modèle performant. Dans ce travail, nous pondérons uniquement des points de fonctionnement des échantillons, sans spécifier de régions dans lesquelles nous souhaitons le modèle performant ($q_1(x_k, u_k) = 1 \forall k$). Ceci revient implicitement à donner autant d'importance à toutes les régions de l'espace d'entrée-état. Cet *a priori* uniforme reste discutable puisqu'il n'est pas impersonnel (*noninformative*). En effet, un changement de représentation d'état pourrait entraîner un changement de la pondération. Cet *a priori* reste donc subjectif, au même titre que le choix de la représentation d'état est subjectif. Toutefois, pour la plupart des systèmes, le choix de la représentation d'état est fait de façon à avoir des grandeurs physiques comme variables d'état, ce qui restreint les possibilités et diminue la part de subjectivité dans le choix de la base de l'espace d'état. Si l'utilisateur souhaite obtenir un modèle performant sur une région particulière de l'espace entrée-état, il est nécessaire de construire une fonction $w^{\text{pref}} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ qui traduit cette préférence, par exemple au moyen d'une gaussienne multivariée centrée sur le point de fonctionnement désiré. Enfin, il suffira d'utiliser la pondération $w_k w_k^{\text{pred}}$ au lieu de w_k .

Approches existantes D'autres méthodes de pondération permettent de pondérer plus fortement les transitoires, par exemple [WP97] présente la possibilité de pondérer les échantillons par $w_k = \frac{1}{t}$ pour un système dont l'entrée est un échelon, afin de donner plus de poids aux échantillons qui composent le transitoire. Ceci nécessite toutefois d'élaborer une fonction de pondération spécifiquement pour chaque signal d'entrée. Une approche intéressante est aussi donnée dans [JQ18] : un poids plus important est donné aux échantillons qui sont plus difficiles à prédire, étant donnés tous les autres échantillons. C'est une approche empirique qui se base sur des outils de théorie de l'information, et qui résulte en une pondération plus importante des échantillons appartenant aux parties transitoires. Toutefois, notre approche diffère de celles-ci puisque nous ne cherchons pas à approximer spécifiquement les comportements transitoires mais plutôt à approximer de façon homogène dans l'espace d'état.

3.3.2 Calcul des coefficients de pondération w_k

La pondération consiste à associer à chaque échantillon une quantité qui indique si celui-ci est dans une région de l'espace d'état riche ou pauvre en échantillons. Un échantillon est donc associé à une pondération de valeur élevée s'il est dans une région avec peu d'échantillons, et une valeur faible s'il est dans une région avec de nombreux échantillons. La somme des coefficients de pondération vaut le nombre d'échantillons N afin de pouvoir facilement comparer les fonctions coût avec et sans pondération.

Différentes pondérations empiriques ont été envisagées, elles sont représentées en figure 3.9. et décrites dans les paragraphes ci-dessous, avec leurs avantages et inconvénients.

Maillage de l'espace d'entrée-état. Une première approche simple consiste à découper l'espace d'entrée-état en différentes régions, au moyen d'une grille. La pondération peut alors être construite comme

$$w_k = \frac{n_c}{N_k} \quad (3.13)$$

avec n_c le nombre de cellules dans lesquelles se trouvent des échantillons et N_k le nombre d'échantillons dans la cellule qui contient le k -ième échantillon. La finesse du maillage est paramétrée par l'utilisateur. Les valeurs extrêmes provoquent un maillage trop grand (une seule cellule contient tous les échantillons) ou trop fin (chaque échantillon est dans une cellule différente) et mènent

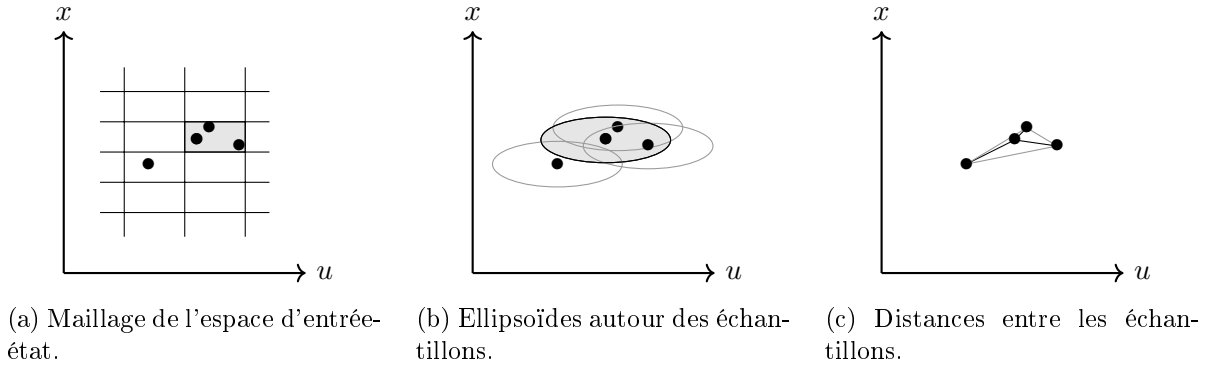


FIGURE 3.9 – Illustration de différentes techniques pour calculer la pondération. Les échantillons sont représentés par le symbole $\bullet$.

à une pondération uniforme, $w_k = 1 \forall k$. Un désavantage de cette méthode est que la position absolue du maillage a une influence sur la pondération. Par exemple, un léger décalage de la grille en figure 3.9a entraîne une pondération des échantillons différente.

Ellipsoïdes autour des échantillons. Une approche assez similaire, mais qui s'affranchit du problème de positionnement absolu du maillage, consiste à construire des ellipsoïdes autour de chaque échantillon et à compter le nombre d'échantillons contenus dans ces ellipses. L'utilisateur définit un ratio a qui permet de calculer les demi-axes b_i des ellipsoïdes sur les différentes dimensions i avec la formule

$$b_i = \frac{\max_k(z_k^i) - \min_k(z_k^i)}{a}, \quad i \in \{1, \dots, n+m\} \quad (3.14)$$

où $z_k = (u_k, x_k)$ représente le k -ième point de fonctionnement dans l'espace d'entrée-sortie de dimension $n+m$, et z_k^i représente sa composante sur la i -ème dimension. L'ensemble des points inclus dans chacun des ellipsoïdes est ensuite obtenu comme suit

$$C_k = \left\{ z_j \left| \sum_{i=1}^{n+m} \frac{(z_j^i - z_k^i)^2}{b_i^2} \leq 1, \quad j \in \{1, \dots, N\} \right. \right\}. \quad (3.15)$$

Puis la pondération est calculée et normalisée, telle que

$$\tilde{w}_k = \frac{1}{|C_k|} \quad (3.16)$$

$$w_k = N \frac{\tilde{w}_k}{\sum_{k=1}^N \tilde{w}_k} \quad (3.17)$$

avec $|C|$ le cardinal de l'ensemble C . De même que pour le maillage, un choix de a trop élevé (chaque ellipsoïde contient tous les échantillons) ou trop faible (chaque ellipsoïde ne contient qu'un échantillon) revient à une pondération uniforme, $w_k = 1$ pour tout k . C'est ce type de pondération que nous utilisons dans la suite de ce chapitre, avec $a = 10$. La pondération obtenue pour la manœuvre décrite en figures 3.3 et 3.5 est donnée en figure 3.10. Les échantillons du régime transitoire en début de manœuvre ont un poids bien plus élevé que les échantillons du régime permanent qui s'ensuit, on a bien un résultat conforme aux attentes.

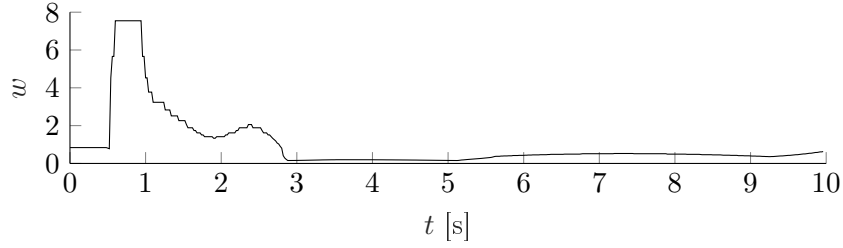


FIGURE 3.10 – Pondération des échantillons en fonction du temps.

Distances entre les échantillons. Cette méthode ne requiert pas de paramétrisation par l'utilisateur, elle utilise la norme euclidienne pour mesurer la distance entre deux échantillons l et j , avec une normalisation par l'amplitude des données sur chaque dimension,

$$d(j, l) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m} \frac{(z_j^i - z_l^i)^2}{(\max_k(z_k^i) - \min_k(z_k^i))^2}}. \quad (3.18)$$

La pondération est finalement obtenue en prenant la somme des distances de l'échantillon considéré à tous les autres échantillons, et en normalisant le résultat

$$\tilde{w}_k = \sum_{j=1}^N d(k, j) \quad (3.19)$$

$$w_k = N \frac{\tilde{w}_k}{\sum_{k=1}^N \tilde{w}_k}. \quad (3.20)$$

L'intention de cette approche est de pondérer plus fortement les échantillons qui sont éloignés des autres, sans avoir à renseigner de paramétrage de l'utilisateur. Cependant, cette méthode ne donne pas toujours le résultat attendu. En considérant par exemple des échantillons distribués en 2 groupes resserrés de $\frac{N-1}{2}$ échantillons et un échantillon entre ces deux groupes, à une distance a du premier et une distance b du second groupe, la pondération (non-normalisée) appliquée aux échantillons du premier groupe est $n + a$, celle au second groupe $n + b$, et pour l'échantillon entre les deux n . On s'attendrait à ce que cet échantillon isolé ait une pondération importante. Cet exemple met en évidence qu'il est nécessaire d'avoir une information sur la distance à partir de laquelle un échantillon est considéré comme suffisamment différent d'un autre. La méthode des ellipsoïdes avec le paramètre a donne la fraction de l'amplitude qui est considérée comme une distance suffisamment importante pour considérer les échantillons différents. Pour le calcul de la pondération de chaque échantillon, un partitionnement est réalisé pour classer les autres observations en un groupe « similaire » et un groupe « différent ». L'information de distance à renseigner permet de définir où se trouve la limite entre ces deux groupes.

3.3.3 Méthodes d'estimation utilisant la pondération

Les coefficients de pondération sont utilisés dans les méthodes où les erreurs sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire que l'erreur sur un échantillon n'affecte pas les échantillons suivants. Nous n'appliquerons donc cette pondération qu'aux méthodes utilisant l'erreur de prédiction (connaissant la trajectoire d'état, chacune des erreurs est calculée indépendamment des autres) et pas aux méthodes d'erreur de simulation ou de tirs multiples où les équations sont

intégrés (l'erreur est alors propagée). On teste ici l'ajout de la pondération avec la méthode d'erreur de prédiction et avec la méthode Espérance-Maximisation.

Pondération de l'erreur de prédiction. Cette méthode est utilisée lorsque l'état est entièrement connu. Les points de fonctionnement $z = (x, u)$ sont donc entièrement connus et la pondération par la méthode des ellipsoïdes peut être directement appliquée. La fonction coût (2.107) devient alors

$$J(\theta) = \sum_{k=2}^N w_k \frac{(y_k - f_d(y_{k-1}, u_{k-1}, \theta))^2}{\sigma^2}. \quad (3.21)$$

Pondération dans l'algorithme EM. Puisque l'algorithme EM estime itérativement l'état (étape E) et les paramètres (étape M), les points de fonctionnement ne sont pas connus *a priori* mais sont estimés au fur et à mesure des itérations. Après chaque étape E, les coefficients de pondération sont calculés à partir de l'entrée et de l'estimation faite de l'état, puis cette pondération est utilisée à l'étape M où l'optimisation des paramètres est effectuée. Ainsi la pondération évolue en même temps que l'estimation de la trajectoire d'état s'affine.

3.4 Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures de l'état

En reprenant l'exemple de la section 3.2, mais en supposant cette fois-ci que seules la vitesse latérale et la vitesse de lacet sont connues (l'état) nous appliquons et comparons les différentes méthodes d'estimation de paramètres présentées dans le chapitre 2 et résumées ci-après.

3.4.1 Description et configuration des méthodes d'identification

Il est à noter que toutes les méthodes étudiées sont employées avec les valeurs initiales de rigidités de dérive $K_f = K_r = -1.2 \cdot 10^5$ N/rad. Toutes les méthodes faisant appel à un algorithme d'optimisation utilisent l'algorithme de Nelder-Mead, où les paramètres sont normalisés de sorte que l'intervalle $(-2 \cdot 10^5, -2 \cdot 10^4)$ corresponde à l'intervalle $(0, 1)$ de la variable normalisée.

Méthode de l'erreur de simulation. C'est la méthode discutée au paragraphe 2.6.1. À chaque itération de l'algorithme d'optimisation, une simulation est réalisée. L'algorithme d'optimisation cherche à minimiser l'erreur entre le modèle et la référence avec la fonction coût

$$J(\theta) = \frac{\|v_y^{\text{mes}} - v_y^{\text{sim}}(\theta)\|_2}{\sigma(v_y^{\text{mes}})} + \frac{\|\dot{\psi}^{\text{mes}} - \dot{\psi}^{\text{sim}}(\theta)\|_2}{\sigma(\dot{\psi}^{\text{mes}})}. \quad (3.22)$$

Contrairement aux autres méthodes, la méthode par erreur de simulation est plus susceptible d'avoir une fonction coût qui présente des minimums locaux. C'est le cas ici (figure 3.12a). Il faut donc initialiser suffisamment bien l'algorithme d'optimisation, ou alors utiliser un algorithme d'optimisation globale.

Méthode des tirs multiples. C'est la méthode dite *multiple shooting error* discutée au paragraphe 2.6.2, à l'intersection entre erreur de simulation et erreur de prédiction. Les simulations sont faites sur des intervalles de 2 secondes, il y a donc 5 simulations de 2 secondes qui débutent aux instants $t = 0, 2, 4, 6, 8$ s. Sur chacun des intervalles, l'erreur est calculée comme à l'équation (3.22), puis les erreurs sont sommées.

Méthode de l'erreur de prédiction. C'est la méthode discutée au paragraphe 2.6.3, qui ne s'applique que si tous les états sont mesurés. Une prédiction de l'état à l'instant suivant est faite avec $x_k^{\text{pred}} = f(x_{k-1}^{\text{mes}}, u_{k-1}, \theta)$. L'algorithme d'optimisation cherche à minimiser les erreurs de prédictions avec la fonction coût suivante

$$J(\theta) = \frac{\|v_y^{\text{mes}} - v_y^{\text{pred}}(\theta)\|_2}{\sigma(v_y^{\text{mes}})} + \frac{\|\dot{\psi}^{\text{mes}} - \dot{\psi}^{\text{pred}}(\theta)\|_2}{\sigma(\dot{\psi}^{\text{mes}})}. \quad (3.23)$$

Méthode de l'erreur de prédiction pondérée. Cette méthode est similaire à la méthode précédente mais elle utilise la pondération proposée précédemment (figure 3.10). La fonction coût devient

$$J(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k \left(v_{y,k}^{\text{mes}} - v_{y,k}^{\text{pred}}(\theta)\right)^2}}{\sigma(v_y^{\text{mes}})} + \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k \left(\dot{\psi}_k^{\text{mes}} - \dot{\psi}_k^{\text{pred}}(\theta)\right)^2}}{\sigma(\dot{\psi}^{\text{mes}})}. \quad (3.24)$$

Estimation par lissage avec un vecteur d'état augmenté. Cette méthode, discutée au paragraphe 2.6.4, consiste à faire une estimation d'état au moyen de la méthode de lissage en augmentant l'état avec les paramètres à estimer (AURTSS, *Augmented Unscented Rauch-Tung-Striebel Smoother*). Les paramètres sont ensuite pris comme la moyenne de leurs valeurs dans l'estimation par lissage. Dans notre exemple, l'état augmenté est $x = (v_y, \dot{\psi}, K_f, K_r)$. Les covariances sont prises comme

$$R = 10^{-2} I_2 \quad Q = \begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^5 I_2 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 10^{-1} I_2 & 0 \\ 0 & 10^{12} I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

L'estimation des états et paramètres donnés par cette méthode sont représentés en figure 3.11.

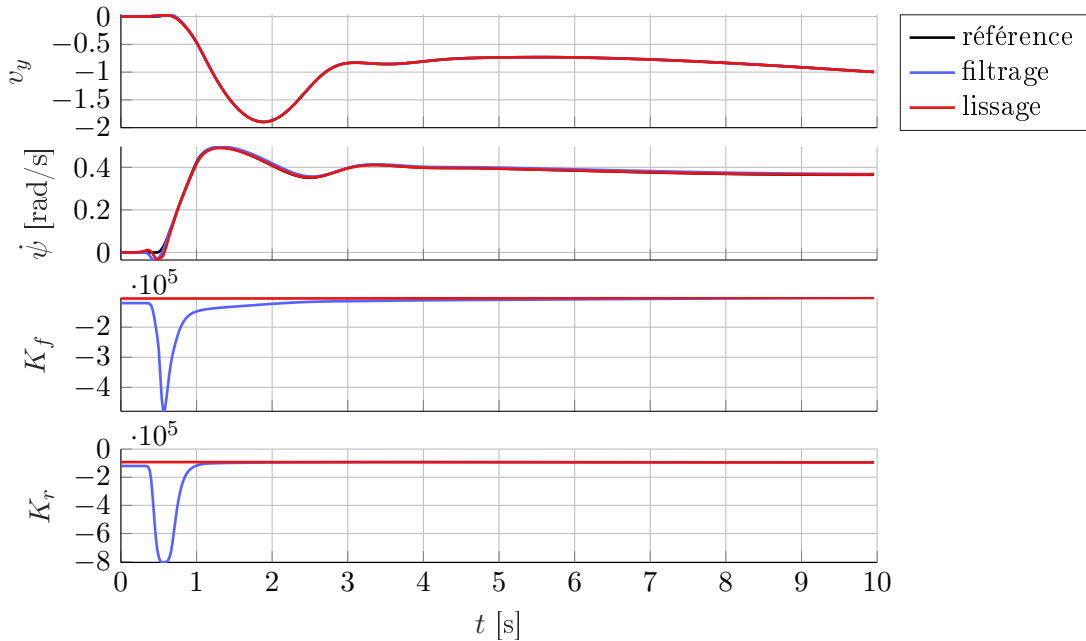


FIGURE 3.11 – Filtrage et lissage avec l'état augmenté.

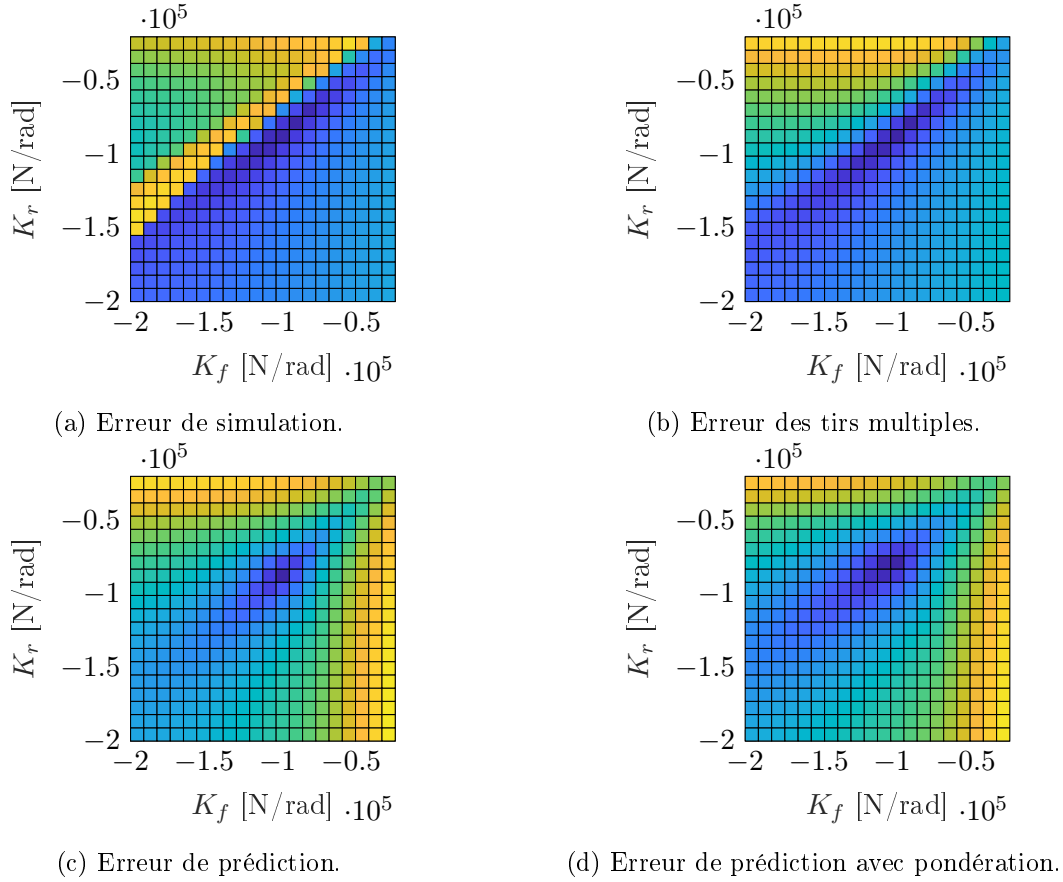


FIGURE 3.12 – Allure des fonctions coût des différentes méthodes d'estimation étudiées. Le bleu correspond à des valeurs faibles, le jaune à des valeurs élevées.

3.4.2 Résultats

Les résultats obtenus pour les estimations des paramètres K_f et K_r par les méthodes précédentes sont donnés dans le tableau 3.2. Après avoir obtenu ces paramètres, des simulations du modèle véhicule à 2 degrés de liberté sont réalisées, à la fois pour la manœuvre utilisée pour estimer les paramètres et pour la manœuvre de validation. Les résultats de ces simulations sont données en figures 3.13 et 3.15 dans le temps, et en figure 3.14 et 3.16 dans l'espace d'état.

	θ_0	θ_{sim}	$\theta_{\text{intervalles}}$	θ_{pred}	$\theta_{\text{pred},w}$	θ_{AURTSS}
K_f	-120000	-97524	-102043	-101289	-105666	-103581
K_r	-120000	-86151	-90718	-90497	-84271	-93518

TABLE 3.2 – Paramètres obtenus avec différentes méthodes connaissant entièrement l'état.

On peut remarquer dans le tableau 3.2 que la méthode fondée sur l'erreur de prédiction avec pondération donne un résultat légèrement différent des autres estimateurs, avec un écart entre K_f et K_r plus important. Dans la figure 3.13, ces méthodes capturent toutes assez bien le point de fonctionnement stationnaire de la seconde partie de la manœuvre utilisée pour l'estimation de paramètres, mais cela est fait au détriment du comportement transitoire en début de manœuvre. Au contraire, la méthode avec pondération ne permet pas à la simulation d'atteindre exactement

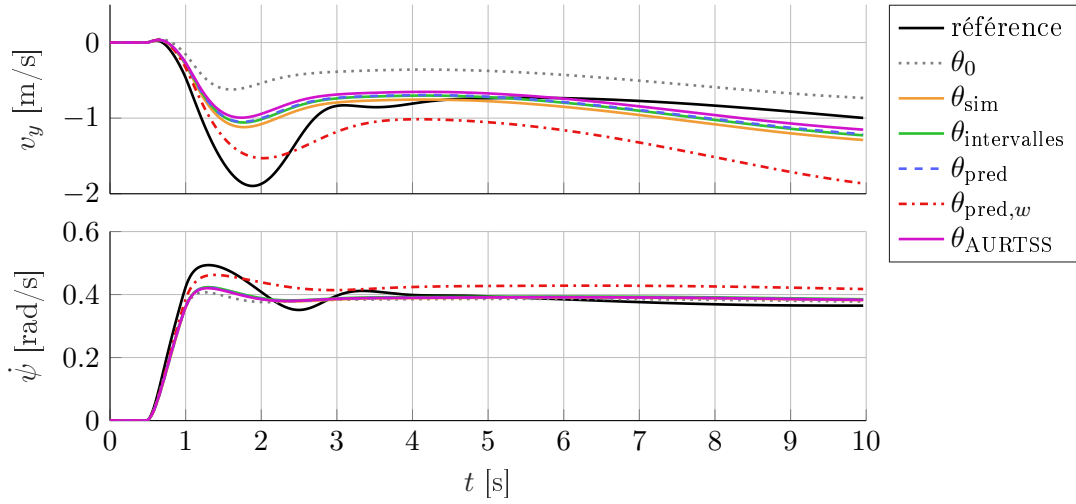


FIGURE 3.13 – Simulations en fonction du temps avec les paramètres identifiés.

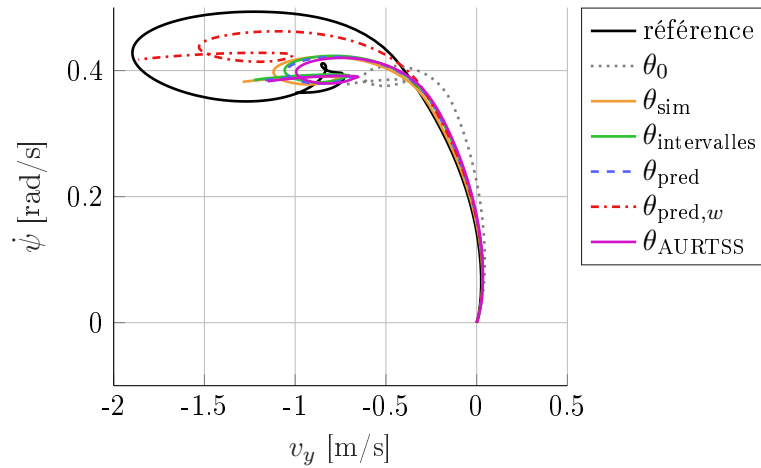


FIGURE 3.14 – Simulations dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.

le même point d'équilibre stationnaire, mais elle permet une meilleure approximation du transitoire. Si nous nous intéressons à la figure 3.14, nous pourrions trouver que la méthode fondée sur l'erreur de prédiction avec pondération permet d'obtenir une simulation qui semble assez proche du système, bien qu'elle ne se stabilise pas au même point de fonctionnement.

En examinant maintenant la manœuvre de validation sur les figures 3.16 et 3.15, la méthode avec pondération donne des résultats plus satisfaisants que les autres méthodes, particulièrement si l'on observe la manœuvre dans l'espace d'état. Nous pouvons justifier cela par le fait que, sur la manœuvre d'apprentissage, la méthode avec pondération a beaucoup plus utilisé la partie transitoire pour optimiser ses paramètres que les autres méthodes, qui ont surtout cherché à bien approximer le point de fonctionnement en régime établi, qui comprenait plus d'échantillons. Or, puisque la manœuvre de validation parcourt une trajectoire différente de la manœuvre d'apprentissage, il ne servait à rien de privilégier certains points de fonctionnements plutôt que d'autres lors de l'apprentissage.

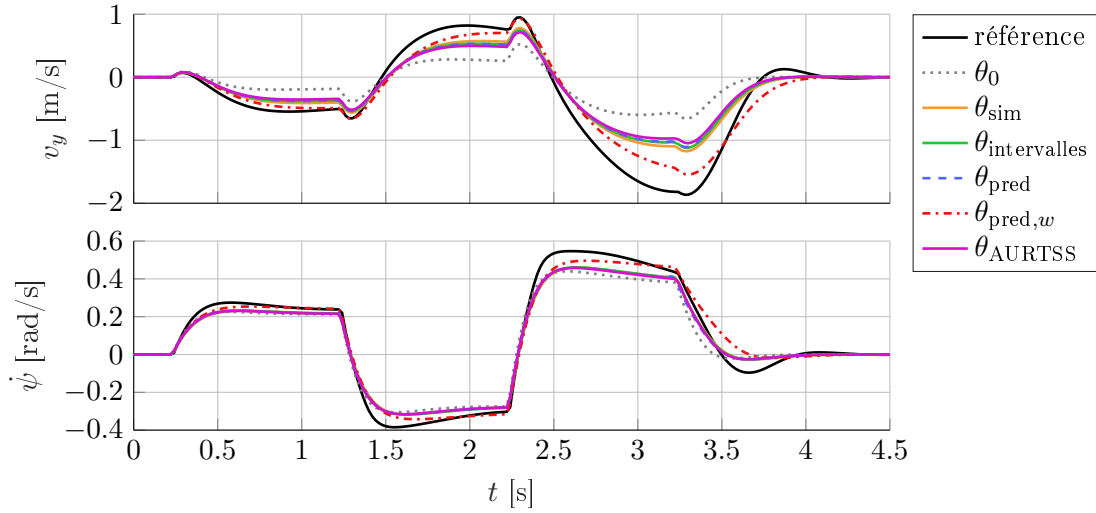


FIGURE 3.15 – Simulations de validation en fonction du temps avec les paramètres identifiés.

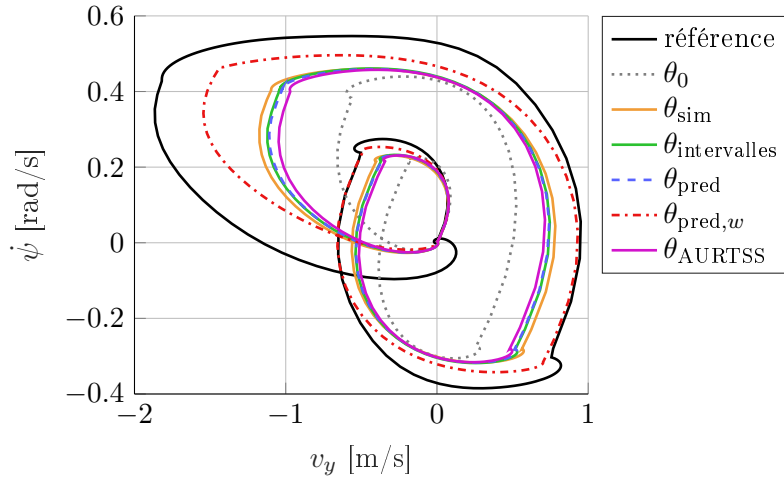


FIGURE 3.16 – Simulations de validation dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.

3.5 Comparaison des méthodes d'identification à partir des mesures d'accélération latérale

Les méthodes sont toujours appliquées sur l'exemple de la section 3.2, mais en supposant cette fois-ci que seules des observations bruitées de l'accélération latérale sont disponibles. La fonction $h(x, u, \theta)$ dépend cette fois des paramètres puisqu'elle calcule

$$h(x, u, \theta) = \frac{F_{y,f} + F_{y,r}}{m} \quad (3.26)$$

et nécessite donc l'évaluation des dérives avant et arrière et des modèles de pneus. Un bruit gaussien centré et de variance 0.1^2 est appliqué au signal d'accélération latérale obtenu depuis le simulateur Carmaker afin de se placer dans la situation où un bruit de mesure vient corrompre les données. La matrice de covariance R pour l'équation de sortie représente à la fois l'incertitude due au bruit de mesure et l'incertitude du modèle due à la mauvaise spécification et aux paramètres

mal ajustés.

Puisque l'état n'est pas entièrement connu, les méthodes d'erreur de prédiction ne sont pas applicables mais sont remplacées par les méthodes EM et EMw (Espérance-Maximisation avec pondération).

3.5.1 Description et configuration des méthodes d'identification

À nouveau, toutes les méthodes faisant appel à un algorithme d'optimisation utilisent l'algorithme de Nelder-Mead où les paramètres sont normalisés de sorte que l'intervalle $(-2 \cdot 10^5, -2 \cdot 10^4)$ corresponde à l'intervalle $(0, 1)$ de la variable normalisée.

Méthodes fondées sur les erreurs de simulation et les tirs multiples. Ces méthodes sont les mêmes qu'à la section précédente mais la fonction coût devient

$$J(\theta) = \|a_y^{\text{mes}} - a_y^{\text{sim}}(\theta)\|_2 \quad (3.27)$$

Cette fonction coût présente à nouveau des minimums locaux contrairement aux autres méthodes.

Algorithme Espérance-Maximisation avec et sans pondération. Cette méthode estime itérativement l'état et les paramètres du modèle, jusqu'à converger vers des valeurs fixes des paramètres. La méthode est décrite en détails au paragraphe 2.6.5. Les valeurs des covariances pour l'équation de mesure, l'équation d'état et l'incertitude de l'état initial sont choisies comme

$$R = 10^{-1} \quad Q = \begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} \quad P_0 = 10^{-1} I_2 \quad (3.28)$$

La version de l'algorithme avec pondération calcule les coefficients de pondération entre les étapes E et M à partir de l'état estimé à l'étape E. La pondération est ensuite appliquée dans le calcul des coefficients $I_2(\theta, \theta^{(j)})$ et $I_3(\theta, \theta^{(j)})$ (équations (C.31) et (C.32) de l'annexe C).

Estimation par lissage avec un vecteur d'état augmenté. C'est la même méthode que précédemment, excepté que la fonction de sortie h est différente. Les covariances sont prises comme

$$R = 10^{-1} \quad Q = \begin{pmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^5 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 10^{-1} I_2 & 0 \\ 0 & 10^9 I_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

3.5.2 Résultats

Les résultats obtenus avec les méthodes d'estimation précédentes sont donnés dans le tableau 3.3. On peut remarquer que les méthodes EM, EMw donnent des estimations très similaires à celles obtenues lorsque l'état était entièrement mesuré. Des simulations du modèle bicyclette non-linéaire à 2 degrés de liberté sont réalisées avec les paramétrages obtenus avec toutes les méthodes. Ces simulations sont présentées aux figures 3.17 et 3.19 dans le temps, et aux figures 3.18 et 3.20 dans l'espace d'état.

Les différentes méthodes ont toutes permis d'obtenir un modèle approximativement correct, excepté pour la méthode basée sur l'erreur de simulation par intervalles, qui semble être dans un minimum local. À nouveau, sur la manœuvre d'apprentissage, la méthode avec pondération approxime mieux la partie transitoire, au détriment du régime permanent (figure 3.17 et 3.18). Lors de la manœuvre de validation (figure 3.19 et 3.20), l'algorithme EMw (avec pondération) donne les meilleurs résultats. Ceci peut s'expliquer par le fait que cette manœuvre excite des

	θ_0	θ_{sim}	$\theta_{\text{intervalles}}$	θ_{EM}	$\theta_{\text{EM},w}$	θ_{AURTSS}
K_f	-120000	-120255	-225415	-99414	-107242	-113273
K_r	-120000	-115944	-441166	-89938	-84843	-109124

TABLE 3.3 – Paramètres obtenus avec les différentes méthodes à partir d’observations de a_y issues du système.

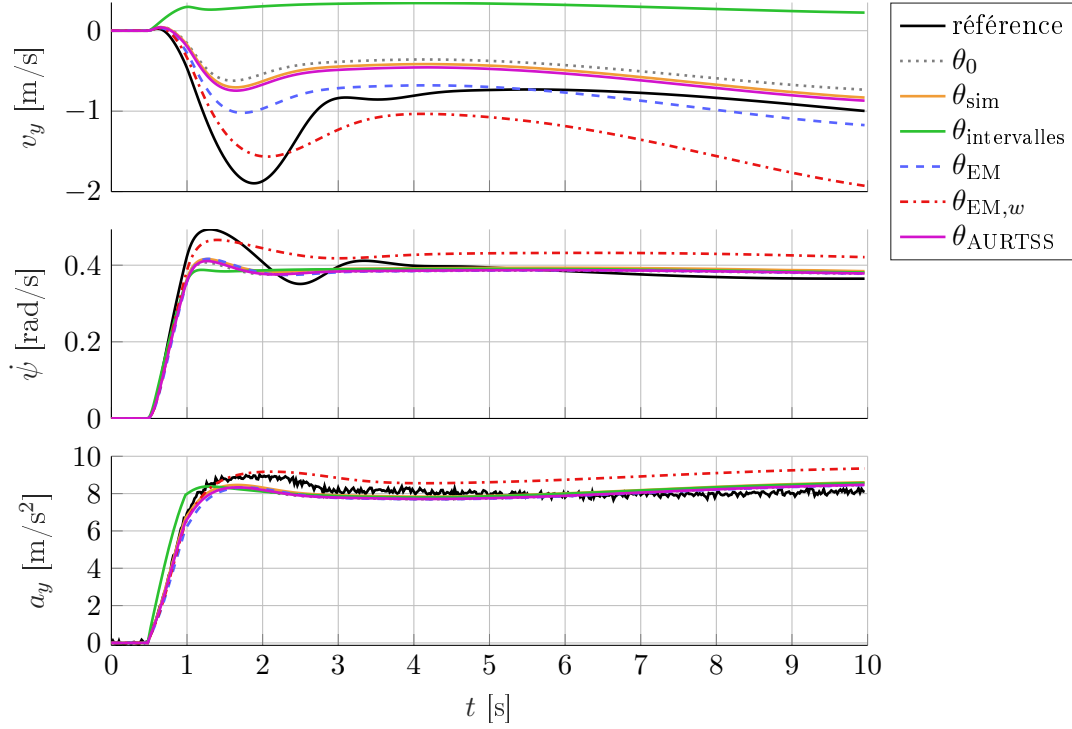


FIGURE 3.17 – Simulations en fonction du temps avec les paramètres identifiés.

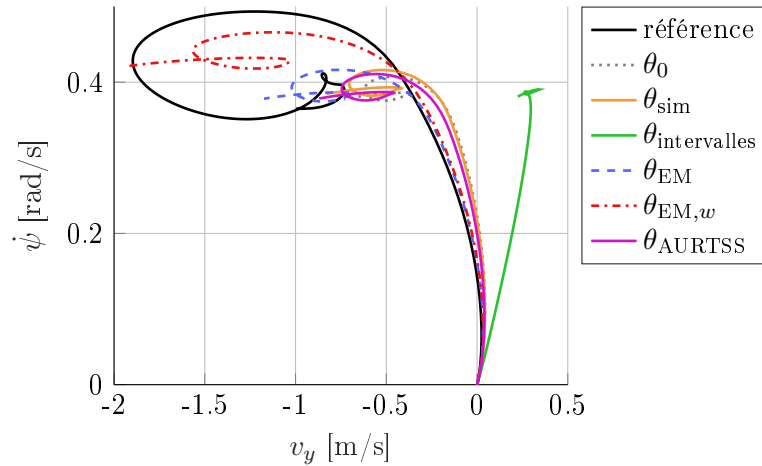


FIGURE 3.18 – Simulations dans l’espace d’état avec les paramètres identifiés.

dynamiques variées, alors que les autres algorithmes ont cherché à très bien approximer un point de fonctionnement particulier, au détriment de toutes les autres dynamiques.

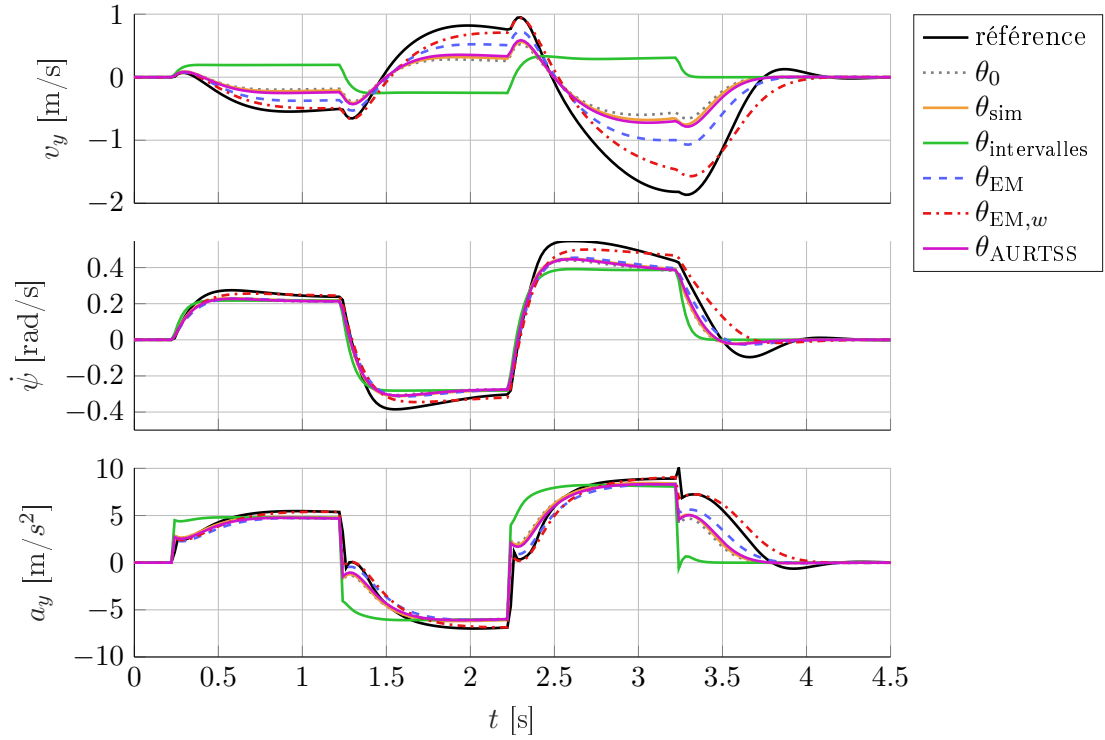


FIGURE 3.19 – Simulations de validation en fonction du temps avec les paramètres identifiés.

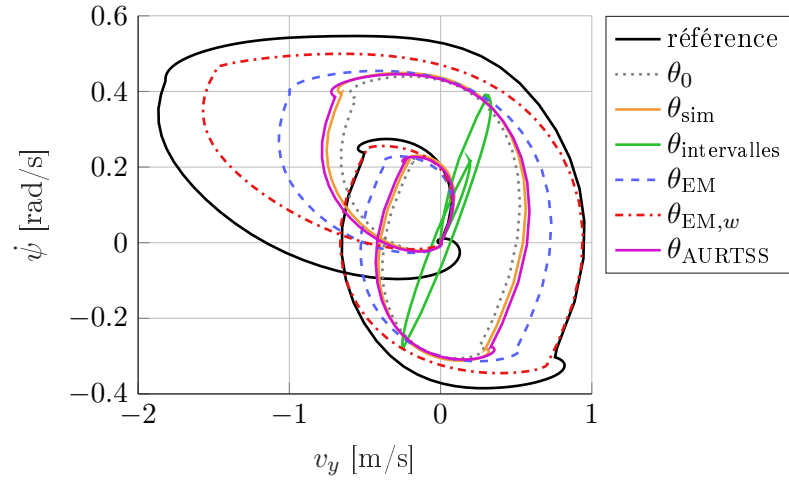


FIGURE 3.20 – Simulations de validation dans l'espace d'état avec les paramètres identifiés.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de recalage des paramètres de rigidités de dérive avant et arrière sur un modèle de dynamique du véhicule (modèle bicyclette) à deux degrés de liberté non-linéaire. Nous avons dans un premier temps considéré le cas où les mesures de v_y , $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$ et a_y sont disponibles, puis le cas où seules les mesures de l'état $(v_y, \dot{\psi})$ sont disponibles, et enfin le cas où uniquement une mesure bruitée de l'accélération latérale a_y est disponible. Plusieurs méthodes d'estimation de paramètres ont été appliquées dans ces différents cas.

cas de figure.

Dans le premier cas, une approche directe permet de remonter, à partir des mesures et des données connues du modèle, aux entrées-sorties du modèle de pneu (dérive et force latérale). Les paramètres des pneus avant et arrière peuvent alors être identifiés indépendamment au travers d'optimisations évaluant uniquement le modèle statique du pneu. Deux solutions sont discutées, selon que l'on optimise au mieux pour tous les différents échantillons, ou que l'on optimise pour obtenir une caractéristique du pneu qui soit une bonne approximation pour les différentes valeurs de dérive.

Cette idée de ne pas s'intéresser à approximer aussi bien les différents échantillons, mais plutôt des points de fonctionnement différents du modèle, est ensuite discutée, et nous proposons d'introduire une pondération dans la méthode basée sur l'erreur de prédiction et dans l'algorithme EM. Cette pondération donne un poids plus élevé aux échantillons isolés et un poids moindre aux échantillons dans des régions de l'espace entrée-état densément échantillonnées. L'objectif est d'obtenir ensuite un modèle qui fasse un compromis différent, afin de mieux représenter le système sur des dynamiques différentes, quitte à être une approximation un peu moins bonne sur les points de fonctionnement très représentés dans les données. Cette approche s'applique spécifiquement lorsque le modèle est incapable de parfaitement approximer les données (*model misspecification*) et que les données sont inégalement réparties dans l'espace d'état, ce qui est le cas en dynamique du véhicule pour de fortes sollicitations.

Dans le deuxième cas considéré, où seul l'état est mesuré, les méthodes basées sur les erreurs de simulation, de simulation avec tirs multiples, de prédiction, de prédiction avec pondération, et la méthode par le lissage RTS avec paramètres dans l'état augmenté, sont comparées. La méthode basée sur l'erreur de prédiction avec pondération donne bien les résultats attendus en approximant moins bien le régime établi, mais en étant une meilleure approximation du système sur des dynamiques variées.

Enfin, nous étudions le cas où seule l'accélération latérale est connue. La méthode basée sur l'erreur de prédiction ne peut plus être appliquée, mais est remplacée par l'algorithme EM. La version avec pondération EMw donne à nouveau de bons résultats sur l'exemple considéré. Les méthodes EM et EMw donnent des résultats très proches du cas où l'état était entièrement mesuré, tandis que les autres méthodes donnent des résultats légèrement moins satisfaisants.

Application au recalage de modèles véhicules pour la validation de l'ESC

Sommaire

4.1	Introduction	94
4.2	Contexte industriel	94
4.3	Système de contrôle de stabilité ESC	96
4.4	Essais et mesures	97
4.4.1	Description de l'essai de régime permanent (RP)	98
4.4.2	Description de l'essai de sinus dwell (SD)	99
4.4.3	Traitement des mesures	100
4.4.4	Analyse des mesures de l'essai de régime permanent	104
4.4.5	Analyse des mesures des essais de sinus dwell	106
4.5	Modèle CarMaker et HIL	108
4.5.1	Modèle CarMaker	108
4.5.2	Bancs HIL	109
4.6	Régulation ESC pré-enregistrée	109
4.7	Paramétrage initial depuis la Flat-Trac	111
4.8	Cas de pressions différentes aux pneus avant et arrières	111
4.9	Étude d'identifiabilité	112
4.10	Limitations pour l'utilisation de l'algorithme EM	118
4.10.1	Contrainte d'initialisation de l'état dans CarMaker	118
4.10.2	Approximation par un modèle à 7 ddl	118
4.10.3	Invalidation de l'approche EM	118
4.11	Minimisation de l'erreur de simulation sur les manœuvres de sinus dwell	120
4.12	Validation de la méthode fondée sur la minimisation de l'erreur de simulation	122
4.12.1	Validation en simulation	123
4.12.2	Validation en Hardware-In-the-Loop	123
4.13	Conclusion	124

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, plusieurs approches ont été présentées pour résoudre le problème d'estimation de paramètres. Après les avoir présentées sous un aspect théorique, elles ont été appliquées sur des exemples académiques. Dans ce chapitre, la problématique industrielle de recalage des paramètres d'un modèle véhicules est traitée. L'objectif est d'ajuster les paramètres d'un modèle véhicule (principalement les paramètres du modèle pneu) à partir de mesures faites sur piste. Le modèle ainsi obtenu est ensuite utilisé sur des bancs *Hardware-In-the-Loop* (HIL) pour le développement et la validation du système ESC (*Electronic Stability Control*) [PM12], en particulier pour la validation des critères de la réglementation de la Commission Économique pour l'Europe des Nations Unies (CEE-ONU, en anglais UNECE) [ECE15] relatifs au test de sinus dwell (sinus avec palier). Les tests en HIL (simulation en boucle avec un ESC réel) viennent en complément de tests physiques. En effet, un minimum de tests physiques est nécessaire, puisque les tests par simulation seule ne peuvent pas être acceptés par les organismes d'homologation comme valides. De plus, des mesures physiques sont nécessaires pour le recalage et la validation de modèles numériques. Les tests en HIL sont alors un enjeu majeur puisqu'ils permettent d'effectuer des développements, validations et études très rapidement tout en maintenant un coût maîtrisé.

L'ajustement des paramètres du modèle de pneu MF5.2 fait dans ce cadre se distingue des autres travaux de la littérature par le fait que les paramètres d'un modèle détaillé de pneu (modèle MF5.2) sont ajustés à partir d'un ensemble réduit de signaux mesurés sur véhicule lors de manœuvres très dynamiques. Les cas généralement traités dans la littérature sont les suivants :

- les paramètres d'un modèle relativement simple, ou quelques paramètres d'un modèle complexe, sont identifiés à partir d'un ensemble réduit de mesures, pour des manœuvres avec de faibles sollicitations [Bad09, Con10] ;
- les paramètres d'un modèle complexe (souvent MF5.2) sont estimés à partir d'un ensemble important de mesures (roues dynamométriques, capteurs de vitesse de rotation, carrossage et dérive des roues), pour des manœuvres en régime stabilisé à vitesse constante [JO16, ABB19, Lam10].

Le cas traité ici, qui considère des manœuvres très dynamiques excitant fortement le couplage entre les comportements longitudinal et latéral, semble donc plus difficile à aborder. La méthodologie proposée permet d'obtenir des résultats satisfaisants, qui toutefois pourront avoir une justification physique moindre, puisque c'est l'ensemble du modèle véhicule qui est ajusté à partir de signaux de dynamique du véhicule, plutôt que d'ajuster uniquement les caractéristiques du modèle de pneu en ayant mesuré ses points de fonctionnement.

Ce chapitre commence par décrire le contexte industriel. Ensuite, les mesures disponibles et le modèle employé sont présentés. L'approche consistant à utiliser les pressions aux freins mesurées lors de l'essai est discutée. Puis, les outils d'identifiabilité introduits au chapitre 2 sont mis en œuvre pour sélectionner l'ensemble de paramètres à identifier. Enfin, les techniques d'estimation de paramètres par l'algorithme EM et l'erreur de simulation sont appliquées ; l'algorithme EM s'avère alors insuffisant et la solution retenue utilise finalement l'estimation de paramètres au moyen de la minimisation de l'erreur de simulation.

4.2 Contexte industriel

L'utilisation des bancs HIL est très répandue à Stellantis. Elle permet de réduire le coût en temps et en ressources tout en testant exhaustivement les fonctions de l'ESC pour les différentes

déclinaisons des véhicules et pour différentes évolutions du *software* de l'ESC.

Les bancs HIL sont utilisés dans les phases de conception et de validation des fonctions complexes que le système ESC réalise. Ils sont aujourd'hui incontournables et permettent de :

- tester l'ESC en situation dégradée, en simulant physiquement des défaillances électriques ou en simulant des défaillances de capteurs ;
- analyser la conception fonctionnelle, en testant le respect des exigences soumises au fournisseur ESC ;
- évaluer l'évolution ou la non régression des performances entre les différentes versions du *software* ESC ;
- évaluer le comportement ESC et véhicule sur les manœuvres non sécuritaires ;
- expertiser des comportements particuliers de dynamique du véhicule et analyser leurs sensibilités aux paramètres du châssis.

Ces actions n'ont de sens que si les simulations sont suffisamment représentatives de la réalité. Une fois qu'un modèle véhicule représentatif est disponible, son utilisation permet de rapidement progresser dans les phases de conception et de validation avec des coûts de développements réduits.

Au sein de Stellantis, le développement d'une gamme de véhicules se fait autour d'un projet commun qui se décline en plusieurs variantes correspondant à différentes finitions d'un même type de véhicule. Ces déclinaisons correspondent par exemple à des véhicules avec des composants différents (moteur, freins, roues, etc.) ou une silhouette différente (break, berline, etc.). Puisque les différentes déclinaisons d'un même véhicule restent suffisamment semblables, une fois que le modèle numérique de la variante qui a été validée physiquement est suffisamment corrélé aux mesures, celui-ci est modifié pour représenter les autres déclinaisons, et est utilisé pour valider ces variantes en simulation HIL.

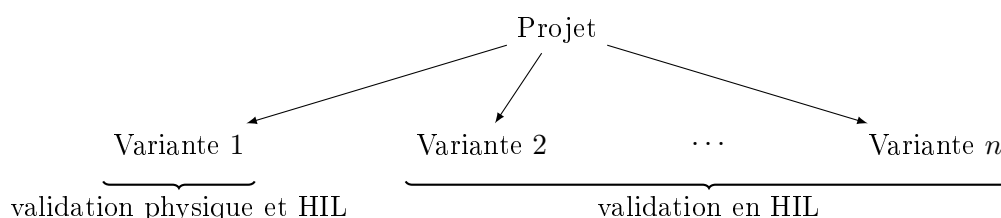


FIGURE 4.1 – Répartition des validations physique et HIL pour la manoeuvre sinus dwell e considérant les différentes déclinaisons d'un véhicule.

Pour tester les fonctions de l'ESC agissant sur le comportement du véhicule, il est donc nécessaire d'utiliser un modèle véhicule représentatif. Un modèle nominal est obtenu à partir de données de conception et de mesures sur les différents sous-systèmes. Toutefois, les simulations obtenues par ce modèle ne sont pas suffisamment corrélées avec les mesures faites sur piste, d'où la nécessité d'une étape d'ajustement des paramètres. Puisque les pneus sont le sous-système le moins bien paramétré dans le modèle nominal, dû à une limitation des moyens de mesure et au fait que les conditions sur le banc de mesure sont différentes des conditions sur route, et puisque les pneus ont une très forte influence sur le comportement du véhicule, nos efforts se concentrent essentiellement sur l'estimation des paramètres du modèle pneu.

4.3 Système de contrôle de stabilité ESC

Un bloc d'assistance active ESC contient une carte électronique comprenant des capteurs (deux accéléromètres et un gyroscope afin de mesurer $a_x, a_y, \dot{\psi}$) et échangeant des informations avec les autres calculateurs et capteurs via le bus CAN du véhicule. Cette carte électronique permet d'actionner des électrovannes à solénoïdes. Ces électrovannes sont de deux types : tout-ou-rien ou proportionnelle. Elles permettent d'ouvrir et fermer des canalisations du circuit de freinage et de réguler les pressions de freinage. Une pompe hydraulique permet de mettre sous pression le liquide de frein ou de le refouler vers des réservoirs, et l'ouverture et la fermeture des différentes électrovannes permet de contrôler précisément le freinage de chacune des roues du véhicule.

L'ESC permet d'assister le conducteur du véhicule, notamment lors de situations dangereuses, au travers de différentes fonctions, comme par exemple :

- Lorsque le conducteur actionne très brutalement le volant, par exemple pour éviter un obstacle, le véhicule peut alors avoir une vitesse de lacet et une dérive très importantes. L'ESC freine les différentes roues du véhicule de façon à créer un moment de lacet pour aider le véhicule à tourner plus rapidement, puis pour stabiliser le véhicule (et éviter le tête-à-queue) quand le conducteur veut revenir en ligne droite. L'ESC cherchera alors notamment à limiter la dérive du véhicule [LSMN04]. C'est cette fonction qui est testée lors de l'essai de sinus dwell.
- Lorsque le conducteur freine et que le glissement d'une roue devient trop élevé, l'ESC relâche la pression de cette roue afin d'éviter le blocage de la roue (fonction *Anti-lock Braking System, ABS*) pour garder le glissement à des valeurs auxquelles la force de freinage est maximisée et le véhicule reste contrôlable (potentiel de force latérale).
- Lorsque le véhicule accélère ou freine alors que les roues d'un côté sont sur une adhérence différente comme par exemple sur le bas-côté de la chaussée ou sur une plaque de verglas (phénomène de μ -split), un moment est créé par la différence des forces longitudinales aux pneus des deux côtés du véhicule. L'ESC freine ou relâche le freinage sur les roues d'un côté pour compenser cet effet.
- Lorsque le conducteur enfonce la pédale de frein avec une très forte vitesse, l'ESC augmente immédiatement la pression dans le circuit de frein via la pompe afin de freiner le véhicule au plus tôt, puisqu'il s'agit certainement d'un freinage d'urgence (fonction d'Aide au Freinage d'Urgence, AFU).
- Lors d'un démarrage en côte, l'ESC maintient une pression dans le circuit de freinage



(a) Composants de l'ESC. Le circuit hydraulique de freinage passe dans le bloc d'aluminium. (b) Carte électronique et solénoïdes. C'est la partie de l'ESC utilisée sur banc HIL.

FIGURE 4.2 – bloc du système ESC

- pendant quelques secondes, le temps que le conducteur appuie sur la pédale d'accélérateur.
- Sur les véhicules récents, les fonctions de freinage d'urgence automatique (*Automatic Emergency Braking, AEB*) et le régulateur de vitesse adaptatif (*Adaptive Cruise Control, ACC*) sont également gérés par l'ESC.

Afin de mener à bien toutes ces fonctions, l'ESC est utilisé avec un capteur de position d'angle volant ainsi qu'un capteur de pression de freinage (pression au maître-cylindre) pour prendre en compte la volonté du conducteur. Il connaît et estime l'état du véhicule en se basant sur des modèles et à partir des informations d'angle volant, de pression frein, des 4 vitesses de roues, de la vitesse de lacet, de l'accélération latérale et quelques informations du calculateur moteur. Il communique avec les autres ECU (*Electronic Control Units*) sur le bus CAN pour interagir avec le conducteur, fournir des informations importantes aux autres ECU et intervenir sur les fonctions ADAS (*Advanced Driver Assistance systems*). Enfin, l'ESC agit en contrôlant les électrovannes et la pompe du circuit de freinage et en envoyant des consignes au calculateur du moteur.

4.4 Essais et mesures



(a) Centre technique de Belchamp.

(b) Piste « synthèse comportement » et aire plane.

FIGURE 4.3 – Vues aériennes du centre technique de Belchamp.

Les mesures utilisées dans ce manuscrit ont été réalisées sur les pistes d'essai du centre technique de Belchamp (à proximité de l'usine de Sochaux, figure 4.3). Deux types d'essais sont utilisés : l'essai dit de « Régime Permanent » (RP) et les essais de type « Sinus Dwell » (SD). Ces essais n'ont pas pour objectif premier de permettre l'identification des paramètres d'un modèle : l'essai de régime permanent est réalisé dans le but d'obtenir des caractéristiques du véhicule et les essais de sinus dwell sont réalisés dans le cadre de l'homologation de l'ESC. La réutilisation de ces données de mesures pour l'identification des paramètres et la validation du modèle véhicule permet d'éviter la réalisation d'autres essais, et donc de réduire les coûts de développement. Les mesures utilisées dans ce document sont celles réalisées lors du développement de la Peugeot 308 III (2021). Les essais de régime permanent (RP) et de sinus dwell (SD) ont été effectués à des dates différentes avec des véhicules différents (le véhicule utilisé pour le sinus dwell est plus abouti que le prototype utilisé pour le régime permanent).

4.4.1 Description de l'essai de régime permanent (RP)

L'essai de régime permanent est décrit dans une procédure interne et correspond essentiellement à la norme [ISO12]. Il s'effectue sur l'aire plane (figure 4.3b). Cet essai se déroule à une vitesse de $75 \text{ km/h} \pm 5$ et consiste à rester stabilisé en régime établi en virage, avec le rapport de boîte de vitesse le plus élevé possible (ou en mode automatique). L'angle volant est maintenu à différents angles pendant au moins 2 secondes (figure 4.4). L'essai permet d'acquérir des mesures en virage stabilisé pour différentes valeurs d'accélération latérale (principalement en dessous de 4 m/s^2). Les quelques valeurs d'angle volant très élevées et de vitesse faible, en figure 4.4, ne sont pas désirées mais simplement dues au fait que l'essayeur a dû faire un demi-tour pour replacer le véhicule face à la piste.

Les instruments de mesures présents sur le véhicule sont :

- un volant instrumenté mesurant l'angle et le couple au volant ;
- un capteur de vitesse (optique) 2 axes permettant de mesurer les vitesses longitudinale et latérale, l'angle de dérive et l'amplitude de la vitesse ;
- une centrale inertielle (trois accéléromètres et trois gyroscopes) mesurant les vitesses angulaires et les accélérations selon les trois axes du repère véhicule R_V au point où la centrale inertielle est positionnée ;
- trois capteurs de distance (lasers) montés à l'avant, à l'arrière côté droit, et à l'arrière côté gauche, mesurent les débattements de caisse z_F, z_{RL}, z_{RR} , ce qui permet de calculer les angles de tangage θ et de roulis ϕ .

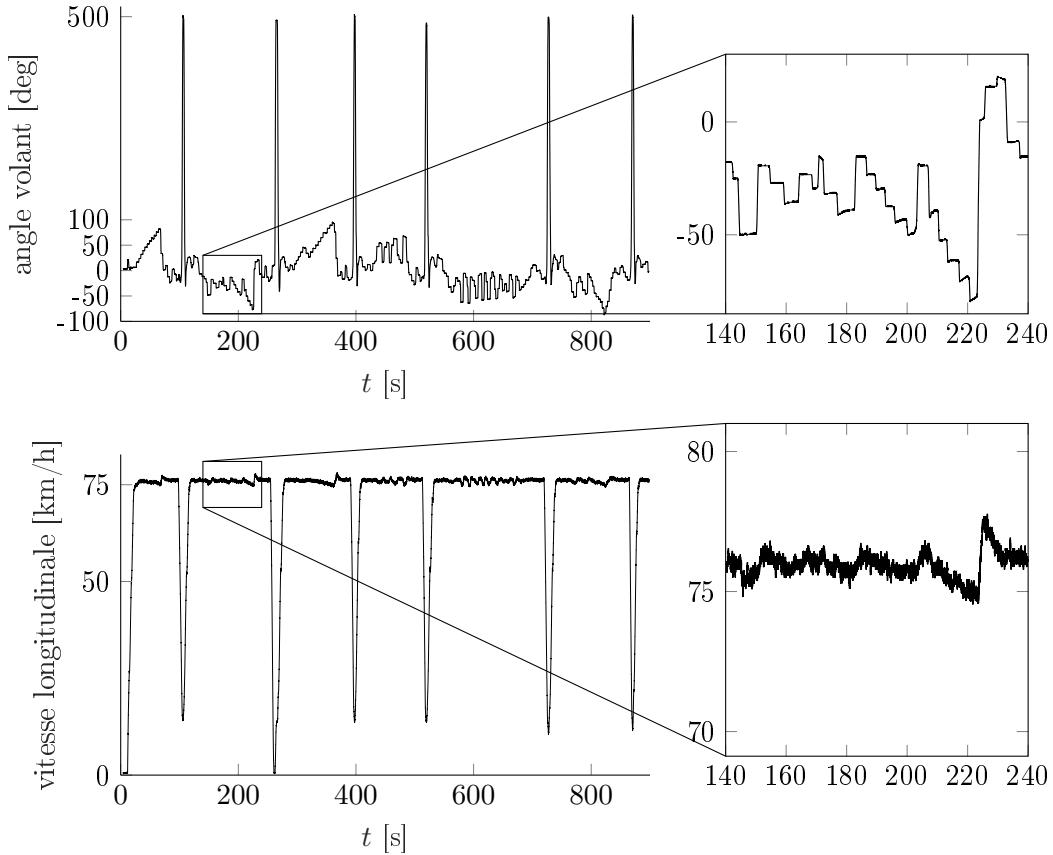


FIGURE 4.4 – Entrées (angle volant et vitesse) pour la manœuvre de régime permanent.

4.4.2 Description de l'essai de sinus dwell (SD)

Dans l'essai de « sinus dwell », décrit dans [ECE15], le volant du véhicule est actionné par un robot qui impose un angle volant ayant une forme de sinus à une fréquence de 0.7 Hz, avec un plateau (*dwell*) au second pic. Ce test est répété avec une vitesse initiale de 80 km/h avec le rapport de boîte le plus élevé, pour plusieurs amplitudes d'angle volant. Ce test est réalisé avec l'ESC activé.

Tout d'abord, il faut déterminer la valeur d'angle volant qui permet d'obtenir une accélération latérale de 0.3 g, notée A . Cette valeur est déterminée à partir de six manœuvres à vitesse constante de 80 km/h en augmentant graduellement l'amplitude de l'angle volant δ . Ensuite, les essais de sinus dwell commencent pour une amplitude initiale de $1.5A$, puis l'amplitude est augmentée par pas de $0.5A$ jusqu'à atteindre 270 degrés d'angle volant (ou $6.5A$ si $6.5A < 300$ degrés). Tout ceci est réalisé dans les deux sens, en inversant le signe de l'angle volant.

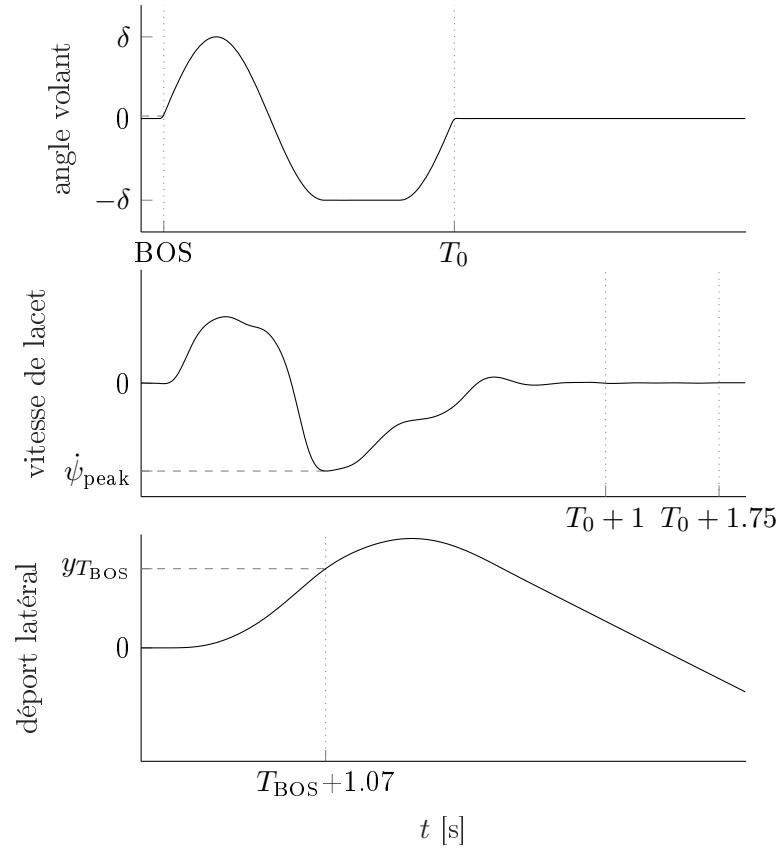


FIGURE 4.5 – Description de la manœuvre de sinus dwell.

Les instruments de mesures présents sur le véhicule sont :

- un volant instrumenté mesurant l'angle et le couple au volant ;
- une centrale inertielle (trois accéléromètres et trois gyroscopes) mesurant les vitesses angulaires et les accélérations selon les trois axes du repère véhicule R_V au point où la centrale inertielle est positionnée.

Les critères décrits dans la réglementation européenne [ECE15] sont les suivants (se reporter également à la figure 4.5) :

- La mesure de vitesse de lacet à $T_0 + 1$ secondes (1 seconde après que l'angle volant ait

complété le sinus dwell) ne doit pas excéder 35% de $\dot{\psi}_{\text{peak}}$, la valeur de la vitesse de lacet maximale (en valeur absolue) après le changement de signe de l'angle volant.

- La mesure de vitesse de lacet à $T_0 + 1.75$ secondes ne doit pas excéder 20% de $\dot{\psi}_{\text{peak}}$.
- Le déplacement latéral du centre de gravité du véhicule par rapport à la ligne droite initiale doit être d'au moins 1.83 mètres à 1.07 secondes après l'instant T_{BOS} (*Beginning Of Steer*, BOS défini comme le temps auquel l'angle volant atteint 5 degrés au début de la manœuvre).

4.4.3 Traitement des mesures

Les signaux de dynamique du véhicule qui nous intéressent ne sont pas directement ceux mesurés, il nous faut donc calculer les variables d'intérêt à partir des signaux mesurés. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir exprimer un vecteur dans différents repères, et de pouvoir calculer une vitesse ou une accélération en différents points d'un solide. Ces deux calculs sont détaillés dans les deux prochains paragraphes, et sont ensuite utilisés dans les traitements spécifiques à chaque instrument de mesure.

Repères et matrices de passage

De façon générale, nous notons u_{0,R_a} l'expression d'un vecteur u_0 dans un repère R_a et $R_b^a = (R_a^b)^\top$ la matrice de rotation permettant de passer d'un repère R_a à un repère R_b . Cette matrice de rotation peut être utilisée pour pivoter un vecteur u_0

$$u_1 = R_b^a u_0 \quad (4.1)$$

ou bien comme une matrice de passage pour exprimer un même vecteur dans des repères différents

$$u_{0,R_b} = R_a^b u_{0,R_a}. \quad (4.2)$$

Dans le cadre des mesures de dynamique du véhicule, les repères utilisés sont ceux présentés au chapitre 1 :

- le repère terre R_E ;
- le repère intermédiaire R_I (obtenu après rotation du lacet ψ) ;
- le repère véhicule R_V (obtenu après rotation du tangage θ puis du roulis ϕ) ;
- le repère roue R_W (obtenu après rotation de l'angle de braquage ϵ depuis le repère intermédiaire).

Les matrices de rotation sont donc

$$R_E^I = \text{rot}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} R_I^V &= \text{rot}_x(\phi) \text{rot}_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ s\phi s\theta & c\phi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$R_E^V = R_I^V R_E^I = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$R_I^W = \text{rot}_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon & 0 \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où les notations c et s sont des abréviations de $\cos$ et $\sin$.

Cinématique du point

La dérivée d'un vecteur u par rapport à un repère R_0 en fonction de sa dérivée par rapport à un autre repère R_1 et de la vitesse de rotation relative entre les deux repères Ω_{R_1/R_0} est notée

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{du}{dt} \right|_{R_1} + \Omega_{R_1/R_0} \wedge u \quad (4.7)$$

Ainsi le terme de gauche dans l'expression (4.7) décrit la variation temporelle du vecteur u par rapport au repère R_0 , tandis que le premier terme à droite de l'égalité décrit la variation temporelle de u par rapport au repère R_1 .

Considérons un point P quelconque décrit par sa position r'_P et sa vitesse v'_P par rapport à un repère R_1 et par sa position r_P et sa vitesse v_P par rapport à un repère R_0 (figure 4.6). L'origine O_1 du repère R_1 est repérée par le vecteur r_{O_1} dans le repère R_0 avec une vitesse v_{O_1} . Le repère R_1 a une vitesse angulaire Ω par rapport au repère R_0 . La loi de composition des vitesses est obtenue à partir de la formule de Bour,

$$v_P = \left. \frac{dr_P}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(r_{O_1} + r'_P)}{dt} \right|_{R_0} = v_{O_1} + \left. \frac{dr'_P}{dt} \right|_{R_1} + \Omega \wedge r'_P = v_{O_1} + v'_P + \Omega \wedge r'_P \quad (4.8)$$

L'accélération a_P de P par rapport au repère R_0 est obtenue en dérivant la vitesse :

$$\left. \frac{dv_P}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{dv_{O_1}}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{dv'_P}{dt} \right|_{R_1} + \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{R_0} \wedge r'_P + \Omega \wedge \left. \frac{dr'_P}{dt} \right|_{R_1} \quad (4.9)$$

$$a_P = \left. \frac{dv_{O_1}}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{dv'_P}{dt} \right|_{R_1} + \Omega \wedge v'_P + \dot{\Omega} \wedge r'_P + \Omega \wedge (v'_P + \Omega \wedge r'_P) \quad (4.10)$$

$$a_P = \underbrace{\left. \frac{dv'_P}{dt} \right|_{R_1}}_{\text{acc. relative}} + \underbrace{\left. \frac{dv_{O_1}}{dt} \right|_{R_0} + \dot{\Omega} \wedge r'_P + \Omega \wedge (\Omega \wedge r'_P)}_{\text{acc. d'entraînement}} + \underbrace{2\Omega \wedge v'_P}_{\text{acc. de Coriolis}} \quad (4.11)$$

où $\dot{\Omega}$ désigne aussi bien la dérivée temporelle de Ω par rapport au repère R_0 que par rapport au repère R_1 , puisque $\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{R_1} + \Omega \wedge \Omega = \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{R_1}$.

Dans le cas où P est fixe dans R_1 , alors $v'_P = 0$, et en notant (r'_x, r'_y, r'_z) les coordonnées du vecteur r'_P dans R_1 on obtient

$$a_P = a_O + \dot{\Omega} \wedge r'_P + \Omega \wedge (\Omega \wedge r'_P) \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} a_{P,x} \\ a_{P,y} \\ a_{P,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{O_1,x} \\ a_{O_1,y} \\ a_{O_1,z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} \right] \quad (4.13)$$

$$\begin{pmatrix} a_{P,x} \\ a_{P,y} \\ a_{P,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{O_1,x} + \dot{\omega}_y r'_z - \dot{\omega}_z r'_y - (\omega_y^2 + \omega_z^2) r'_x + \omega_x (\omega_y r'_y + \omega_z r'_z) \\ a_{O_1,y} + \dot{\omega}_z r'_x - \dot{\omega}_x r'_z - (\omega_z^2 + \omega_x^2) r'_y + \omega_y (\omega_z r'_z + \omega_x r'_x) \\ a_{O_1,z} + \dot{\omega}_x r'_y - \dot{\omega}_y r'_x - (\omega_x^2 + \omega_y^2) r'_z + \omega_z (\omega_x r'_x + \omega_y r'_y) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

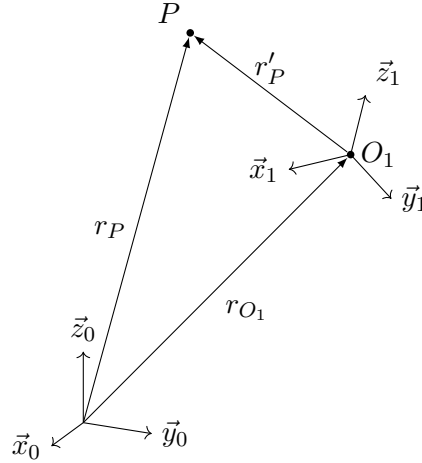
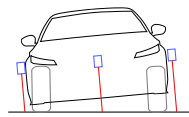
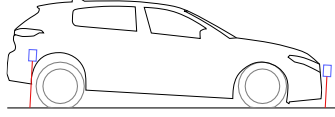


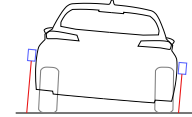
FIGURE 4.6 – Vecteurs et repères utilisés dans les relations cinématiques des équations (4.8) à (4.14).



(a) Vue de devant.



(b) Vue de côté.



(c) Vue de derrière.

FIGURE 4.7 – Positionnement des capteurs lasers de hauteur de caisse.

Capteurs lasers de hauteur de caisse

Des capteurs de distance laser mesurent la distance au sol depuis l'arrière gauche, l'arrière droit et l'avant de la caisse (figure 4.7). Connaissant le positionnement relatif des capteurs, on peut en déduire le roulis et le tangage avec les équations

$$\tan(\phi) = \frac{z_{RL} - z_{RR}}{y_{\text{laser}}} \quad (4.15)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{z_{RL} + z_{RR}}{2} - z_F}{x_{\text{laser}}}. \quad (4.16)$$

Capteur de vitesse optique

Les signaux de vitesse et de dérive obtenus depuis le capteur optique (Correxit) placé à l'arrière du véhicule sont exprimés dans le repère intermédiaire R_I puisque le capteur est fixe avec le véhicule et que sa mesure se base sur le sol qui défile sous le véhicule.

Selon le paramétrage de la chaîne d'acquisition fait par l'essayeur, les signaux enregistrés sont la dérive et l'amplitude de la vitesse au capteur, α_C et v_C , ou la vitesse longitudinale et la vitesse latérale au capteur, v_{Cx} et v_{Cy} . Les signaux manquants peuvent être simplement obtenus avec les relations

$$\tan(\alpha_C) = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} \quad (4.17)$$

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}. \quad (4.18)$$

Les vitesses et la dérive dans le plan du sol peuvent ensuite être obtenus en d'autres points en utilisant la relation (4.8) et en remplaçant les points O et P par la position du capteur C et le point souhaité et en utilisant $\Omega = (0, 0, \dot{\psi})^\top$ (les repères R_0 et R_1 sont ici assimilés aux repères R_E et R_I). On obtient alors les vitesses (et la dérive avec $\tan \alpha = v_y/v_x$)

— à la projection du centre de masse sur le sol,

$$v_{Gx} = v_{Cx} - \dot{\psi}(y_G - y_C) \quad (4.19)$$

$$v_{Gy} = v_{Cy} + \dot{\psi}(x_G - x_C) \quad (4.20)$$

— à la projection du centre de l'essieu arrière sur le sol,

$$v_{Rx} = v_{Cx} - \dot{\psi}(y_R - y_C) \quad (4.21)$$

$$v_{Ry} = v_{Cy} + \dot{\psi}(x_R - x_C) \quad (4.22)$$

— à la projection du centre de l'essieu avant sur le sol,

$$v_{Fx} = v_{Cx} - \dot{\psi}(y_F - y_C) \quad (4.23)$$

$$v_{Fy} = v_{Cy} + \dot{\psi}(x_F - x_C) \quad (4.24)$$

Centrale inertielle

La centrale inertielle comprend 3 gyromètres et 3 accéléromètres. La centrale inertielle utilisée ici est une RT3000 et peut utiliser en plus des gyromètres et accéléromètres un GPS ; les mesures étant alors fusionnées à l'aide d'un filtrage de Kalman.

Afin d'obtenir les angles de roulis, tangage et lacet, les vitesses de rotations obtenues depuis les gyroscopes et exprimées dans R_V sont intégrées de sorte à obtenir les quaternions représentant la rotation entre R_E et R_V [Boy17]. Ces quaternions sont ensuite convertis en angles de roulis, tangage et lacet.

Tout d'abord la position angulaire initiale $(\phi_0, \theta_0, \psi_0)$ est convertie en quaternion

$$q_{\text{init}} = \begin{pmatrix} q_{0,\text{init}} \\ q_{1,\text{init}} \\ q_{2,\text{init}} \\ q_{3,\text{init}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_0/2) \cos(\theta_0/2) \cos(\psi_0/2) + \sin(\phi_0/2) \sin(\theta_0/2) \sin(\psi_0/2) \\ \sin(\phi_0/2) \cos(\theta_0/2) \cos(\psi_0/2) - \cos(\phi_0/2) \sin(\theta_0/2) \sin(\psi_0/2) \\ \cos(\phi_0/2) \sin(\theta_0/2) \cos(\psi_0/2) + \sin(\phi_0/2) \cos(\theta_0/2) \sin(\psi_0/2) \\ \cos(\phi_0/2) \cos(\theta_0/2) \sin(\psi_0/2) - \sin(\phi_0/2) \sin(\theta_0/2) \cos(\psi_0/2) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

puis à partir de la condition initiale (4.25), et en utilisant les vitesses de rotation mesurées par la centrale inertielle, on intègre l'équation

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & -\omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} q \quad (4.26)$$

et finalement on obtient les angles de roulis, tangage, lacet comme

$$\phi = \arctan \left(\frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \right) \quad (4.27)$$

$$\theta = \arcsin(2(q_0 q_2 - q_3 q_1)) \quad (4.28)$$

$$\psi = \arctan \left(\frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right). \quad (4.29)$$

Une fois ces angles connus, la matrice de passage R_V^I est alors connue et l'on peut calculer les accélérations au capteur (point M , position de la centrale inertielle) dans le repère intermédiaire, et soustraire l'influence de la pesanteur ($g = (0, 0, -9.81)^\top$) à la composante verticale,

$$a_{M,R_I} = (R_I^V)^\top a_{M,R_V,\text{grav}} + g \quad (4.30)$$

avec l'indice « grav » dénotant la mesure sans correction de la pesanteur. Puis l'on peut projeter les accélérations à nouveau dans le repère véhicule

$$a_{M,R_V} = R_I^V a_{M,R_I} \quad (4.31)$$

et appliquer la relation (4.9) pour obtenir le vecteur accélération en différents points du véhicule. Par exemple, pour l'accélération au centre de gravité, les points M et G remplacent les points O et P et l'on utilise $\Omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ (les repères R_0 et R_1 sont assimilés ici aux repères R_E et R_V , le terme v_P' est nul car la distance de M à G est fixe),

$$a_{G,R_V} = a_{M,R_V} + \dot{\Omega} \wedge \overrightarrow{MG} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \overrightarrow{MG}). \quad (4.32)$$

Pour successivement intégrer les accélérations et obtenir les vitesses et les déplacements, il faut se placer dans le repère inertiel R_E (intégrer dans le repère mobile n'a pas de sens physique),

$$a_{G,R_E} = (R_E^V)^\top a_{G,R_V}. \quad (4.33)$$

on peut alors obtenir les vitesses longitudinale et latérale dans R_E

$$v_{Gx,R_E} = \int a_{Gx,R_E} \quad (4.34)$$

$$v_{Gy,R_E} = \int a_{Gy,R_E} \quad (4.35)$$

et les projeter dans le repère R_I (intéressant dans le cas où il n'y a pas de mesure de vitesse par capteur optique)

$$v_{Gx,R_I} = \cos(\psi) v_{Gx,R_E} + \sin(\psi) v_{Gy,R_E} \quad (4.36)$$

$$v_{Gy,R_I} = -\sin(\psi) v_{Gx,R_E} + \cos(\psi) v_{Gy,R_E}. \quad (4.37)$$

Enfin, les vitesses peuvent encore être intégrées pour obtenir les déplacements longitudinal et latéral

$$r_{Gx,R_E} = \int v_{Gx,R_E} \quad (4.38)$$

$$r_{Gy,R_E} = \int v_{Gy,R_E}. \quad (4.39)$$

4.4.4 Analyse des mesures de l'essai de régime permanent

Sur les mesures de l'essai de régime permanent, il est nécessaire d'isoler les virages stabilisés. Ceci est réalisé automatiquement en cherchant toutes les séquences commençant à une vitesse de 75 km/h ± 2 , et dans laquelle la vitesse ne varie pas de plus de 2 km/h, l'angle volant ne varie pas de plus de 2 degrés et la vitesse de lacet ne varie pas de plus de 0.01 rad/s. On obtient alors un ensemble de séquences, en rouge sur la figure 4.8. en prenant la moyenne de l'angle volant, de la vitesse, de l'accélération latérale, etc. Sur chacune de ces séquences, nous

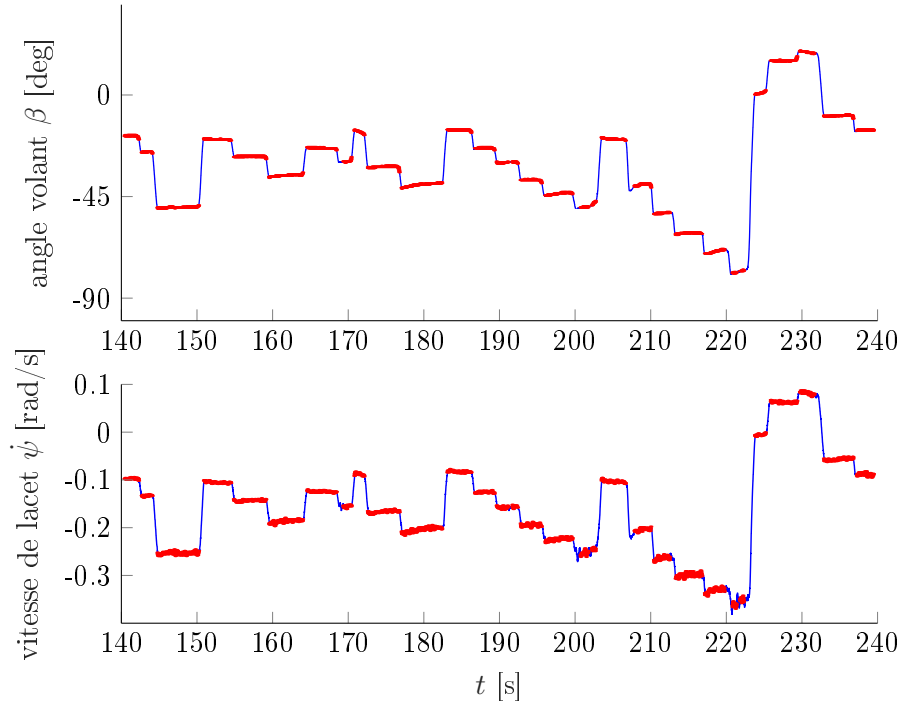


FIGURE 4.8 – Identification des séquences de régime permanent.

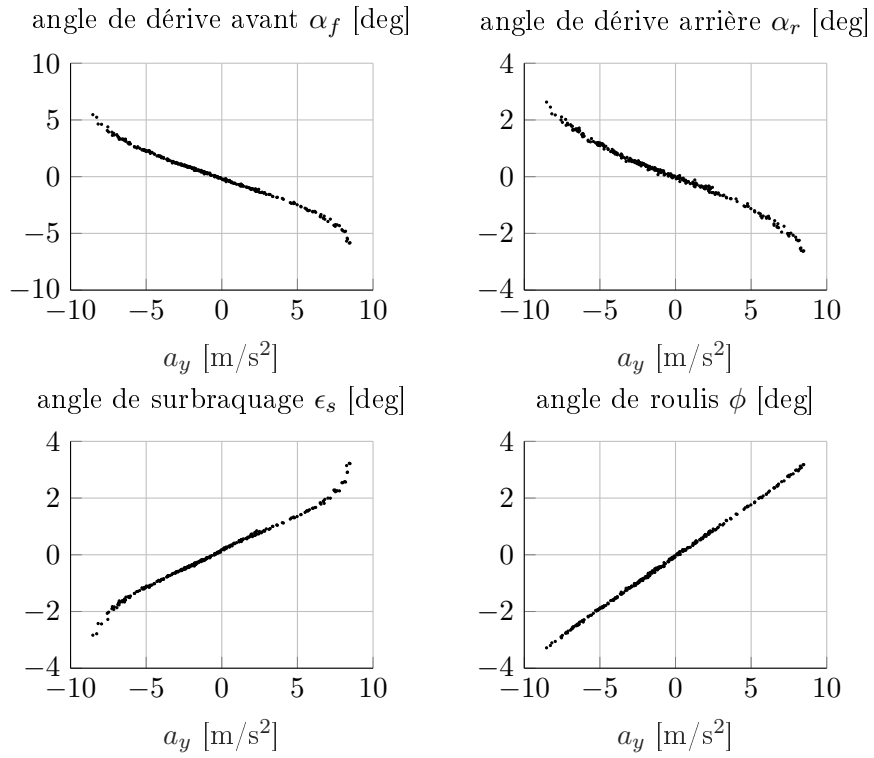


FIGURE 4.9 – Caractéristiques obtenues à partir des séquences de régime permanent.

obtenons les caractéristiques de la figure 4.9, où chaque point correspond à une séquence tirée de la manœuvre de régime permanent.

Puisque le régime permanent correspond à un ensemble de points d'équilibres, il est inutile d'observer les données dans le temps. On représente généralement les différentes grandeurs en fonction d'une des variables. En figure 4.9 nous choisissons de représenter les angles de dérive moyens calculés pour les roues avant et arrières, ainsi que l'angle de surbraquage et le roulis en fonction de l'accélération latérale. Notons qu'il est inutile de représenter la vitesse de lacet puisqu'en régime permanent on a $a_y = \dot{\psi}v_x$, vu au chapitre 1 (1.27).

En examinant la figure 4.9, on remarque que tous les signaux sont liés de façon linéaire pour une accélération latérale comprise entre -5 et +5 m/s². C'est dans cette zone que le modèle bicyclette (1.18) permet de bien expliquer les mesures.

Une première approximation des paramètres de rigidité de dérive PKY1 et PKY2 du modèle MF5.2 peut être obtenue à partir des mesures de régime permanent en appliquant un raisonnement similaire à celui présenté à la section 3.2. En régime permanent l'accélération de lacet est nulle, l'équation (3.6) se simplifie donc en

$$F_{y,f} = \frac{l_r m a_y}{l_f + l_r} \quad \text{et} \quad F_{y,r} = \frac{l_f m a_y}{l_f + l_r}. \quad (4.40)$$

À partir des différents points d'équilibre obtenus dans la zone linéaire ($|a_y| < 4 \text{ m/s}^2$), une estimation des points de fonctionnement des pneus avant et arrières en régime permanent peut alors être faite. Une première estimation des rigidités de dérive avant et arrière (figure 4.10) peut donc être donnée ; c'est la pente des droites représentées en figure 4.10.

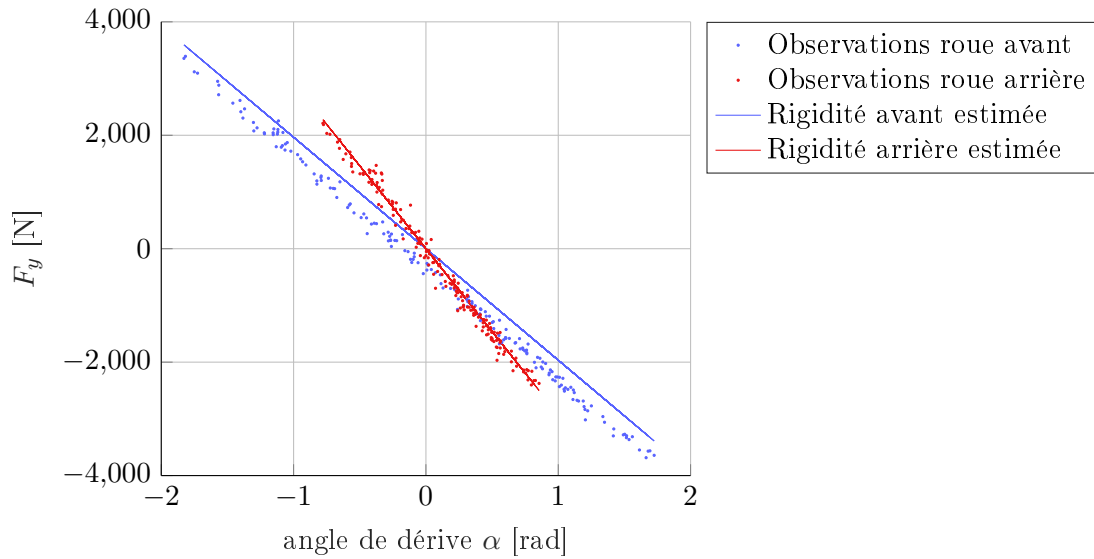


FIGURE 4.10 – Estimation des rigidités de dérive avant et arrière pour approximer au mieux les points calculés par la relation (4.40).

4.4.5 Analyse des mesures des essais de sinus dwell

Les essais de sinus dwell permettent de vérifier que le véhicule répond à la réglementation [ECE15] en évaluant la performance de la régulation ESC. À partir des données de la centrale inertielle, l'accélération est calculée au centre de gravité et intégrée pour obtenir le déplacement

latéral du véhicule, ce qui permet de calculer le critère de déport. On a alors les trois critères $\dot{\psi}(T_0+1)$, $\dot{\psi}(T_0+1.75)$ et $y(T_{\text{BOS}}+1.07)$ en figure 4.11. Dans le cas présenté ici, la valeur de l'angle volant pour atteindre $0.3g$ d'accélération latérale est $A = 27.5$ degrés. Les tests de sinus dwell commencent donc à $1.5A = 41$ degrés. Les critères de la réglementation sont largement respectés, notamment les critères de vitesse de lacet, qui traduisent que les oscillations du véhicule dues à l'angle volant ont rapidement été amorties et que le véhicule a retrouvé un comportement stable.

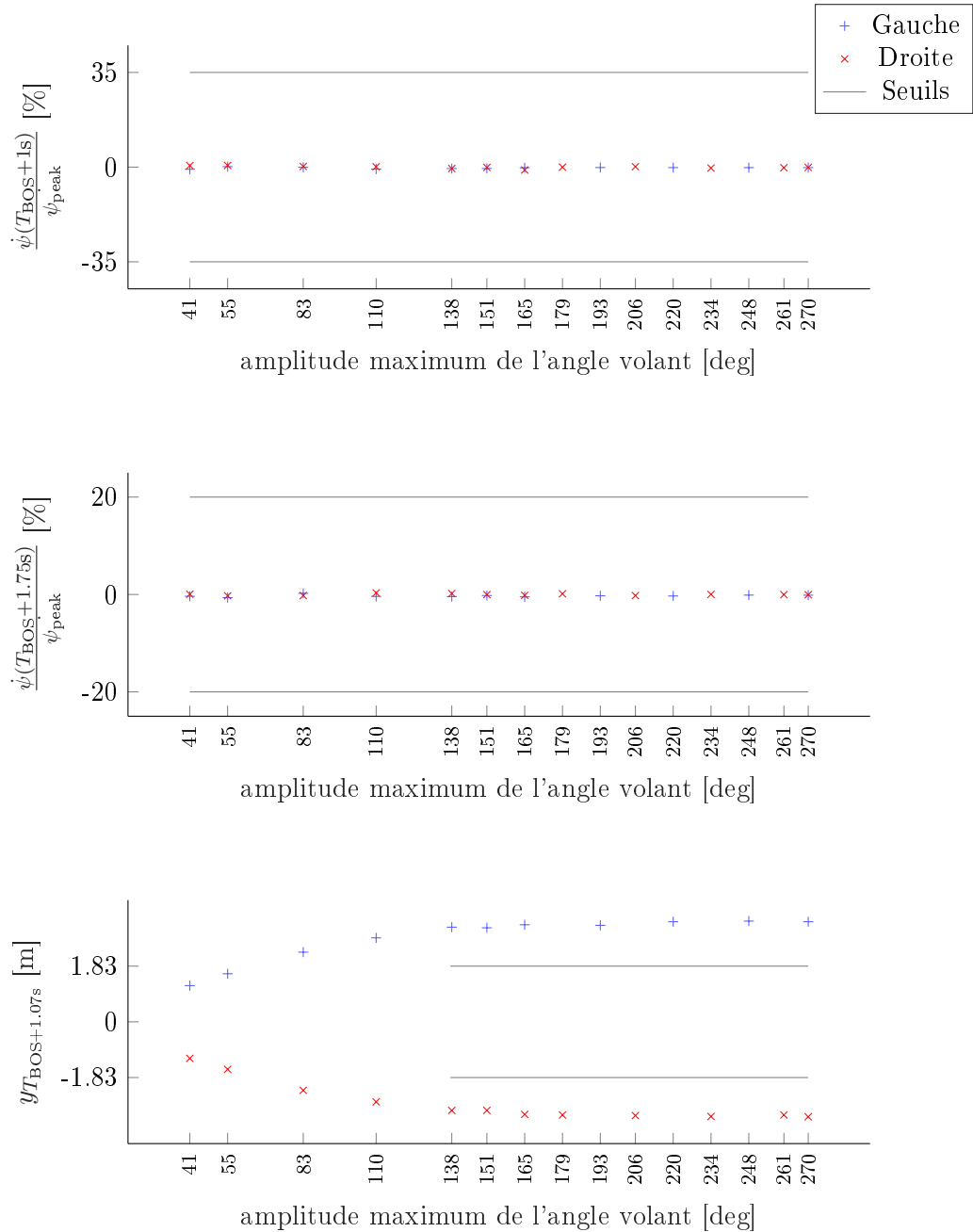


FIGURE 4.11 – Critères de la réglementation [ECE15] sur la vitesse de lacet et le déport latéral.

4.5 Modèle CarMaker et HIL

4.5.1 Modèle CarMaker

Les modèles numériques utilisés en *Hardware-In-the-Loop* sont construits et simulés dans l'environnement CarMaker. Ce modèle a une base de 14 degrés de liberté : la position et l'orientation du véhicule (6 ddl), les vitesses de rotations de chacune des roues (4ddl), ainsi que les débattements de suspensions (4 ddl) [IPG17]. À cela s'ajoute des degrés de liberté dans les différents sous-systèmes selon le type de modèle choisi pour chaque sous-système (moteur, chaîne de traction, pneumatiques, suspensions, direction, etc.). Les équations de la dynamique du véhicule sont calculées à l'aide du programme MESA VERDE [WWS90]. Ci-dessous les modélisations des différents sous-systèmes du véhicule sont listées :

- la caisse est paramétrée par sa masse, la position de son centre de gravité et ses moments d'inertie.
- Les éléments suspendus (roues et porte-fusées) sont paramétrés par leurs positions, masses et inerties.
- Les suspensions sont paramétrées par des tables de correspondance permettant de calculer les efforts en fonction des débattements, des vitesses de débattement et de la position de la crémaillère. L'élasto-cinématique est modélisée par des matrices de raideur.
- Le groupe moto-propulseur est paramétré par sa vitesse de rotation (degré de liberté), son inertie, et par des tables de correspondance pour décrire le couple moteur en fonction de sa vitesse de rotation et de l'appui sur la pédale d'accélérateur. Le modèle comprend également un contrôleur (*Electronic Control Unit, ECU*) permettant par exemple de contrôler le ralenti du moteur.
- La chaîne de traction est composée de l'arbre de transmission, l'embrayage, la boîte de vitesse et le différentiel. Les propriétés de ces différents éléments (rapports de transmission, inerties, raideur en rotation, efficacité, amortissement visqueux, etc.) sont modélisées.
- Le système de direction est modélisé comme un rapport constant entre l'angle volant et la position de la crémaillère, puis l'orientation des roues en fonction de la position de la crémaillère est modélisée dans les tables de correspondance liées aux suspensions.
- Le système de freinage est modélisé par un modèle « boîte blanche » simple construit à partir des équations de la physique. En utilisation en HIL, les conduites hydrauliques sont retirées de l'ESC et l'action des électroaimants actionnant normalement les électrovannes est mesurée par des capteurs à effet Hall, et permet d'établir de combien les électrovannes doivent être ouvertes ou fermées dans la simulation. Le fonctionnement de la pompe hydraulique de l'ESC est entièrement modélisé dans le modèle numérique.
- Les effets aérodynamiques sont modélisés comme des forces et des moments s'appliquant au barycentre des quatre points de contact roue-sol. Leurs expressions dépendent de la densité de l'air, d'une surface et d'une longueur caractéristique du véhicule, du carré de la vitesse relative du vent par rapport au véhicule, et de l'angle d'incidence du vent par rapport au véhicule au travers de tables de correspondances.
- Les pneumatiques sont modélisés par le modèle MF5.2 (*Magic Formula 5.2*) décrit en annexe A.

Ainsi, le modèle CarMaker différencie chaque sous-système du véhicule et les modélise généralement par des modèles *boîte blanche* relativement simples, mais en faisant varier certains paramètres au travers de tables de correspondance, ce qui permet d'avoir des modèles plus représentatifs. Le pneu est, lui, modélisé au travers du modèle semi-empirique MF5.2.

4.5.2 Bancs HIL

Les bancs *Hardware-In-the-Loop* (figure 4.12) permettent de simuler un modèle véhicule en temps réel dans l'environnement CarMaker et de boucler cette simulation au contrôleur ESC. La carte électronique avec les solénoïdes est montée sur la platine du banc HIL et des capteurs à effet Hall permettent de mesurer l'activité des électrovannes. Le circuit de freinage, la pompe et les électrovannes sont modélisés numériquement ; cette partie du modèle est calibrée à partir de mesures faites sur un ESC monté dans un véhicule (avec une mesure des pressions et des signaux de l'ESC).

Certains bancs sont également équipés d'un système de freinage complet (le circuit hydraulique est entièrement physique et ne fait donc pas partie du modèle) ou avec le système de direction assistée.

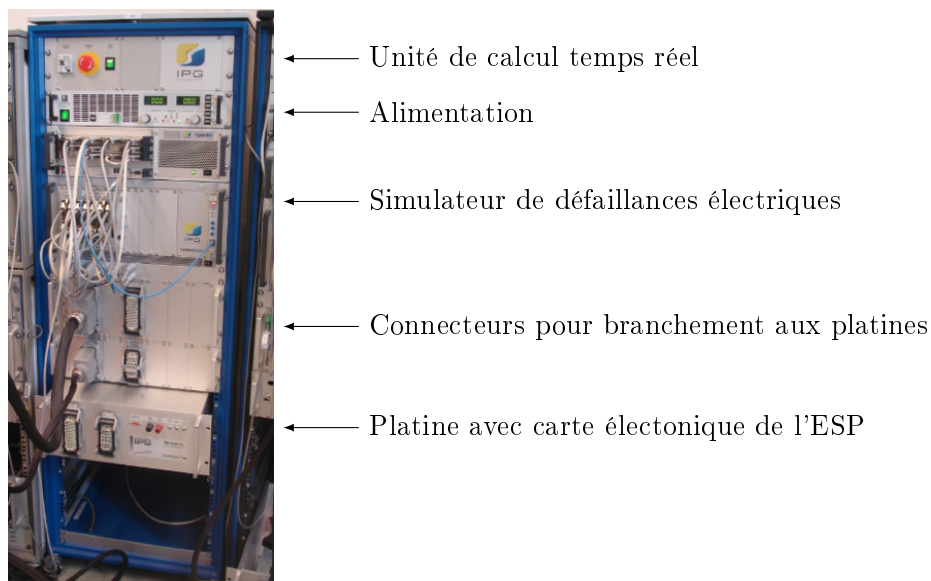


FIGURE 4.12 – Banc *Hardware-In-the-Loop* utilisé à Stellantis.

4.6 Régulation ESC pré-enregistrée

Nous considérons ici le cas de manœuvres où l'ESC a une action corrective en agissant sur les pressions du circuit de freinage, comme dans le cas du test de sinus dwell, afin de stabiliser le véhicule. Trois approches peuvent être envisagées pour comparer les mesures à la simulation :

- réaliser en simulation HIL la même manœuvre que celle de la mesure, comparer les signaux de dynamique du véhicule, et dans le cas du test de sinus dwell, les critères associés à l'essai qui sont spécifiés au paragraphe 4.4.2.
- Réaliser en simulation HIL la même manœuvre que celle de la mesure, et comparer les signaux de dynamique du véhicule et les critères liés à l'essai, ainsi que l'action de régulation de l'ESC (les pressions de freins). Cette méthode peut se rapprocher de la *Joint Input-Output Approach* décrite dans [FL99].
- Enregistrer les pressions de freins et les utiliser comme des entrées sur le modèle en simulation sur ordinateur, sans utiliser les bancs HIL. Cette méthode peut se rapprocher de la *Direct Approach* décrite dans [FL99].

Discussion du problème d'estimation de paramètre avec une rétroaction. La première approche peut être critiquée puisqu'il se pourrait qu'en étudiant uniquement les variables de dynamique du véhicule du système bouclé, la simulation semble proche des mesures mais que la rétroaction (les pressions de freinage) soit différente. Puisque l'ESC corrige la trajectoire du véhicule par un asservissement de sa dynamique, pour une même consigne d'angle volant mais sur des modèles véhicules différents, il se pourrait que l'ESC induise des rétroactions différentes mais qui résultent en un comportement semblable des modèles véhicules. En revanche, si nous étudions à la fois les variables de dynamique du véhicule et les pressions aux freins, alors ce problème ne se pose plus.

Afin d'illustrer cette idée, examinons le modèle de la dynamique de roue,

$$I_r \dot{\omega} = -RF_x + M_{\text{drive}} + M_{\text{brake}}. \quad (4.41)$$

Considérons que la pédale d'accélérateur n'est pas enfoncée, M_{drive} est alors un couple résistant constant (frein moteur), et le couple de freinage est proportionnel à la pression p dans le circuit de freinage,

$$M_{\text{brake}} = r2\mu Ap \quad (4.42)$$

avec A la surface de la plaquette de frein, μ le coefficient de frottement entre la plaquette et le disque et r le rayon. Le coefficient 2 prend en compte les plaquettes des deux côtés du disque. Dans le cas où le pneu reste dans le domaine linéaire, on a l'approximation

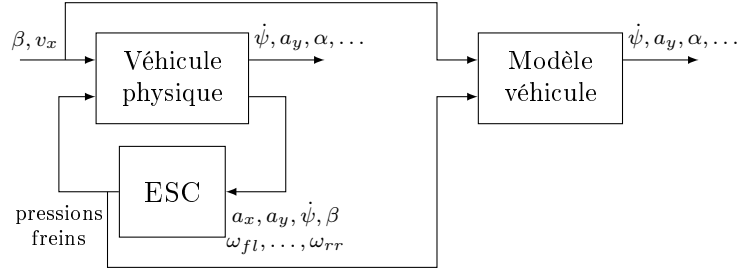
$$F_x = K_x \kappa \quad (4.43)$$

avec κ le glissement du pneu. On constate alors que la dynamique de la roue peut rester inchangée si un changement du paramètre K_x est compensé par une augmentation de la pression p . Ceci reste un exemple simple à l'échelle d'une seule roue mais pourrait se généraliser au véhicule complet. Par ailleurs, même si un changement de paramétrage du véhicule ne pourrait pas être exactement compensé par un changement dans la régulation de l'ESC, il est fort probable que l'estimation de paramètres en boucle fermée soit rendue plus difficile par un plus grand nombre de minimums locaux dans les problèmes d'optimisations sous-jacents aux différentes méthodes d'estimation de paramètres.

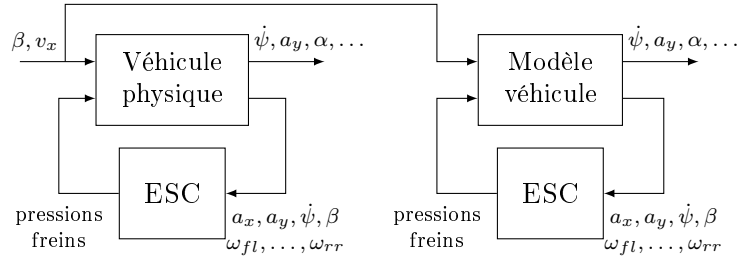
Choix de l'approche sans HIL. Entre la seconde et la troisième approche, qui peuvent être mise en correspondance avec respectivement les approches *Joint Input-Output Approach* et *Direct Approach* de [FL99], nous faisons le choix de l'approche directe. Ce choix est dicté par des considérations pratiques : les bancs HIL sont en nombre limités et sont déjà utilisés à leurs pleines capacités, or une méthode d'estimation de paramètres utilisant les bancs HIL nécessiterait d'effectuer un nombre important de simulations (en temps réel puisqu'en HIL) avant de converger vers un paramétrage convenable, ce qui requièrerait un temps très important d'utilisation des bancs HIL.

D'un autre côté, effectuer des simulations sans ESC mais en utilisant les pressions mesurées lors de l'essai physique comme des entrées du modèle permet de recalibrer le modèle sans banc HIL, et potentiellement plus rapidement puisqu'une simulation sur ordinateur s'effectue environ dix-huit fois plus rapidement qu'en temps réel. De plus, sur ordinateur, le logiciel CarMaker est facilement interfaçable avec Matlab, logiciel sur lequel pourra être programmée la méthode de recalage de paramètres.

L'approche retenue s'apparente alors à une identification en boucle ouverte, puisque l'entrée du système est connue à l'avance (mesures de l'angle volant et des pressions freins obtenues lors des essais physiques) et ne dépend donc pas de la sortie du modèle.



(a) Simulation en boucle ouverte, les pressions mesurées sont injectées comme des entrées dans le modèle.



(b) Simulation en boucle fermée avec l'ESC sur banc HIL.

FIGURE 4.13 – Simulations en boucle ouverte et boucle fermée.

4.7 Paramétrage initial depuis la Flat-Trac

Les paramètres initiaux du modèle MF5.2 sont obtenus par la procédure d'identification « MICH2MF » développée par Michelin. Cette procédure permet d'obtenir un paramétrage pour le modèle MF5.2 à partir de mesures faites sur un banc de test « Flat-Trac » (figure 4.14). Sur ce type de banc de test, le pneu est monté sur une jante spécifique qui permet de mesurer les efforts. La roue est alors actionnée et permet d'orienter le pneu à différents angles de dérive, de carrossage et pour différentes charges verticales.

Le test des pneumatiques sur Flat-Trac permet de faire des comparaisons relatives entre différents pneumatiques, et permet d'avoir un paramétrage initial pour les modèles de véhicules numériques. Les pneumatiques sont testés sur ce banc de test pour différentes pressions de gonflage. Puisque les pneumatiques montés sur véhicules ont généralement des pressions de gonflage différentes à l'avant et à l'arrière, ces tests permettent d'obtenir des paramétrages pour les modèles de pneu des trains avant et arrière.

4.8 Cas de pressions différentes aux pneus avant et arrières

Dans le cas de pressions différentes aux pneus des trains avant et arrière, des modèles différents sont donc utilisés (modèles MF5.2 paramétrés différemment). Ceux-ci sont initialisés à partir des mesures obtenues sur Flat-Trac pour les pressions de gonflage considérées. Optimiser ensuite différemment les paramètres des pneus avant et arrière semble déraisonnable. En effet, l'ajustement des coefficients a pour objectif de représenter la différence entre le comportement du pneu sur Flat-Trac et le comportement du pneu monté sur le véhicule lors d'essais sur piste. On peut alors raisonnablement supposer que la proportion avec laquelle les paramètres sont modifiés doit être la même à l'avant et à l'arrière ; nous n'ajusterons donc qu'un seul paramètre global θ



FIGURE 4.14 – Machine de test des pneumatiques « Flat-Trac ». Photographie d'une Flat-Trac du site de Belchamp, parue dans l'Est Républicain le 19 décembre 2018.

pour modifier les paramètres p_f et p_r des pneus avant et arrière :

$$p_f = p_{f,\text{init}} + \theta p_{f,\text{init}} \quad (4.44)$$

$$p_r = p_{r,\text{init}} + \theta p_{r,\text{init}}. \quad (4.45)$$

Ceci permet à la fois d'optimiser un nombre raisonnable de variables en plus de maintenir un aspect physique, puisque la variation de comportement en passant de la Flat-Trac au véhicule sur piste est la même pour les paramètres des pneus avant et arrière. Cette approche de modifier les paramètres des pneus avant arrières dans les mêmes proportions est déjà employée dans l'approche manuelle de recalage des paramètres.

4.9 Étude d'identifiabilité

Afin de savoir quels paramètres chercher à estimer, une étude d'identifiabilité est réalisée selon la méthode décrite dans le chapitre 2 au paragraphe 2.7.2. Puisque seuls les paramètres du modèle de pneu sont recalés, une approche particulièrement adaptée est proposée pour étudier l'influence des paramètres en évitant de faire un nombre prohibitif de simulations avec le logiciel CarMaker, pour un gain de temps important. Pour cela, nous proposons l'approche suivante :

- une seule simulation sur CarMaker est réalisée, avec le paramétrage nominal θ^* dans le voisinage duquel l'étude sera valable ;
- les variables d'entrée du modèle de pneu MF5.2 sont enregistrées à chacune des roues au cours de la simulation (dérive, glissement, charge, inclinaison) ;
- un modèle MF5.2 (codé sous Matlab) est évalué pour ces entrées enregistrées, sans toutefois la partie transitoire, afin d'obtenir en sortie les efforts F_x, F_y et les moments M_y à chacune des roues ;
- ce modèle MF5.2 est évalué répétitivement en modifiant légèrement un à un les différents paramètres, en modifiant ensemble les paramètres des pneus avant et arrière par la relation 4.44 ;

- Sur ces différentes évaluations, et en projetant les quantités dans le repère intermédiaire avec (4.6), les équations de dynamique du véhicule permettent d'évaluer la dérivée des vitesses longitudinale, latérale et de lacet avec les équations

$$\dot{v}_x(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i \in \{fl, fr, rl, rr\}} F_{x,i}(\theta) + \dot{\psi} v_y \quad (4.46)$$

$$\dot{v}_y(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i \in \{fl, fr, rl, rr\}} F_{y,i}(\theta) - \dot{\psi} v_x \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} I_{zz} \ddot{\psi}(\theta) &= l_f (F_{y,fl}(\theta) + F_{y,fr}(\theta)) - l_r (F_{y,rl}(\theta) + F_{y,rr}(\theta)) \\ &\quad - \left(\frac{b}{2} - y_G \right) (F_{x,fl}(\theta) + F_{x,rl}(\theta)) + \left(\frac{b}{2} + y_G \right) (F_{x,fr}(\theta) + F_{x,rr}(\theta)) \\ &\quad + \sum_{i \in \{fl, fr, rl, rr\}} M_{z,i}(\theta) \end{aligned} \quad (4.48)$$

en connaissant la géométrie et la masse du véhicule, la position du centre de masse et l'inertie de lacet ;

- finalement la discrétisation d'Euler permet d'obtenir une prédiction, sur un pas de temps, des vitesses longitudinale, latérale et de lacet pour tous les instants de temps de la manœuvre, et pour toutes les variations des paramètres du modèle pneu,

$$v_{x,k+1}^{\text{pred}}(\theta) = v_{x,k} + dt \dot{v}_{x,k}(\theta) \quad (4.49)$$

$$v_{y,k+1}^{\text{pred}}(\theta) = v_{y,k} + dt \dot{v}_{y,k}(\theta) \quad (4.50)$$

$$\dot{\psi}_{k+1}^{\text{pred}}(\theta) = \dot{\psi}_k + dt \ddot{\psi}_k(\theta) \quad (4.51)$$

- la version discrète de la fonction de sensibilité (2.128) est calculée pour les trois sorties, pour toutes les variations des paramètres, et est normalisée par la différence entre une borne haute et basse des paramètres θ^{ub} et θ^{lb} , et par l'écart-type sur les mesures :

$$\tilde{s}_{v_x/\theta_i}(k, \theta^*) = \frac{v_{x,k}^{\text{pred}}(\theta) - v_{x,k}^{\text{pred}}(\theta^*)}{\theta_i - \theta_i^*} \frac{\theta_i^{\text{ub}} - \theta_i^{\text{lb}}}{\sigma(v_x)} \quad (4.52)$$

$$\tilde{s}_{v_y/\theta_i}(k, \theta^*) = \frac{v_{y,k}^{\text{pred}}(\theta) - v_{y,k}^{\text{pred}}(\theta^*)}{\theta_i - \theta_i^*} \frac{\theta_i^{\text{ub}} - \theta_i^{\text{lb}}}{\sigma(v_y)} \quad (4.53)$$

$$\tilde{s}_{\dot{\psi}/\theta_i}(k, \theta^*) = \frac{\dot{\psi}_k^{\text{pred}}(\theta) - \dot{\psi}_k^{\text{pred}}(\theta^*)}{\theta_i - \theta_i^*} \frac{\theta_i^{\text{ub}} - \theta_i^{\text{lb}}}{\sigma(\dot{\psi})} \quad (4.54)$$

- les matrices de sensibilité normalisée (2.130) pour les trois sorties sont ensuite calculées et concaténées (également multipliées par une grande constante pour éviter des arrondis numériques). L'indice de colinéarité, ainsi que la norme euclidienne sur chacune des colonnes, sont calculés et permettent de classer les paramètres, puis de sélectionner les plus influents sur la manœuvre considérée. En pratique, nous utilisons l'indice de corrélation pour faire un choix sur le nombre de paramètres à identifier.

Considérons 29 paramètres candidats du tableau 4.1 ci-après, qui sont par expérience des paramètres ayant une influence sur les résultats de simulation. Le tableau 4.2 donne les résultats de l'analyse d'identifiabilité en considérant différents ensembles de manœuvres de sinus dwell pour plusieurs amplitudes d'angle volant :

- ± 55 degrés (valeur au premier pic du signal d'angle volant) ;
- ± 270 degrés ;
- un ensemble d'amplitudes différentes de ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179 , $+193$, ± 270 degrés.

longitudinal pur	PCX1	facteur de forme
	PDX1	coefficient d'adhérence à charge nominale
	PDX2	variation de l'adhérence avec la charge
	PEX1	coefficient de courbure à charge nominale
	PEX2	variation de la courbure avec la charge
	PKX1	rigidité de glissement à charge nominale
	PKX2	variation de rigidité de glissement avec la charge
	PKX3	variation exponentielle de la rigidité de glissement avec la charge
longitudinal couplé	RBX1	réduction de F_x en fonction de la dérive
	RBX2	variation de la réduction de F_x en fonction de la dérive avec le glissement
latéral pur	PCY1	facteur de forme
	PDY1	coefficient d'adhérence à charge nominale
	PDY2	variation de l'adhérence avec la charge
	PEY1	coefficient de courbure à charge nominale
	PEY2	variation du coefficient de courbure avec la charge
	PKY1	rigidité de dérive à charge nominale
	PKY2	proportion de la charge nominale pour laquelle la rigidité de dérive est maximale
	PKY3	variation de la rigidité de dérive avec l'angle d'inclinaison
latéral couplé	RBY1	réduction de F_y en fonction du glissement
	RBY2	variation de la réduction de F_y en fonction du glissement avec la dérive
moment d'auto-alignement	QBZ1	coefficient de pente pour M'_{z0} à charge nominale
	QBZ2	variation du coefficient de pente avec la charge
	QCZ1	coefficient de forme
	QDZ1	maximum de la chasse du pneumatique
	QDZ2	variation du maximum de la chasse du pneu avec la charge
	QEZ1	coefficient de courbure à charge nominale
	QHZ1	décalage horizontal à charge nominale
	SSZ1	distance $S_{sz1}R_0$ pour le bras de levier avec F_x
	SSZ2	variation de la distance $S_{sz1}R_0$ avec F_y

TABLE 4.1 – Ensemble des 29 paramètres candidats pour l'étude d'identifiabilité. Leur intégration dans les formules du modèle de pneu MF5.2 se trouve en annexe A.

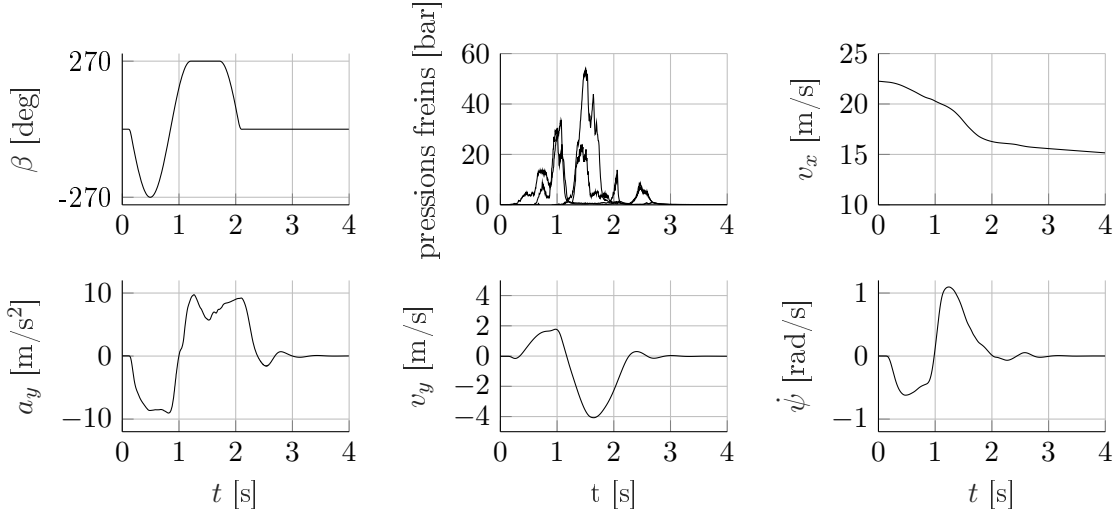
En utilisant un seuil de l'indice de colinéarité $\gamma_{\text{seuil}} \approx 20$, on remarque que la manœuvre de sinus dwell à ± 55 degrés permet d'identifier bien moins de paramètres que la manœuvre à ± 270 degrés. Ceci s'explique puisque l'ESC n'intervient pas à ± 55 degrés et intervient très fortement à ± 270 degrés, ce qui fait que le comportement longitudinal et le couplage entre longitudinal et latéral ont une influence sur la manœuvre à ± 270 degrés. De plus, à ± 270 degrés, les dérives sont bien plus importantes, et les paramètres caractérisant le comportement latéral non-linéaire deviennent influents.

SD à ± 55 degrés			SD à ± 270 degrés			SD à ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179 , $+193$, ± 270 degrés		
θ	γ	$\ \tilde{S}_y(\theta)\ _2$	θ	γ	$\ \tilde{S}_y(\theta)\ _2$	θ	γ	$\ \tilde{S}_y(\theta)\ _2$
PKY1	0	177.7	PDY1	0	57.5	PKY1	0	83.7
PDY1	3.6	57.3	PCY1	1.3	30.8	PDY1	1.3	59.8
PKX1	3.7	6.4	PKY1	1.7	24.5	PCY1	1.7	20.6
PKY2	19.6	111.7	PDX1	2.2	15.7	RBX1	1.9	11.5
QDZ1	29.7	4.5	QCZ1	2.2	7.7	QCZ1	2.0	7.5
RBX1	29.7	2.1	PKX1	2.3	3.5	PKX1	2.1	5.4
QCZ1	30.0	2.9	RBX1	3.2	6.7	PKY2	13.9	52.6
PKY3	41.3	5.6	PDY2	4.5	8.2	RBX1	13.9	4.5
PCY1	58.9	23.2	PKY2	8.7	15.1	PDY2	14.0	6.9
PKX3	60.3	4.0	RBX2	8.7	12.4	RBX2	14.2	7.6
PEY1	72.0	3.4	RBX1	8.8	16.5	QDZ1	18.6	2.3
PDY2	140.7	2.8	PKX3	9.2	2.8	PDX1	18.6	9.9
QEZ1	140.8	0.78	PEY1	9.7	4.0	PKX3	18.7	4.0
QHZ1	143.5	0.072	QDZ1	10.9	0.77	QEZ1	18.9	2.0
QBZ2	155.8	0.57	QEZ1	12.6	1.5	PKY3	30.6	2.8
RBX1	159.2	0.23	PCX1	14.9	1.9	PCX1	30.7	1.5
QBZ1	320.8	1.6	RBX2	21.9	6.3	PEY1	30.8	2.9
RBX2	324.2	0.043	PKY3	22.0	0.93	QBZ1	30.9	1.5
QDZ2	338.5	0.13	PDX2	22.0	1.5	RBX2	31.2	4.1
PDX1	341.4	0.035	QBZ1	23.4	1.0	PDX2	31.2	0.92
SSZ2	366.6	0.048	PEY2	23.5	0.24	QBZ2	32.6	0.55
PEY2	378.0	0.097	QBZ2	23.5	0.37	PEY2	32.6	0.18
SSZ1	379.6	0.0024	PEX2	23.6	0.12	QHZ1	32.7	0.043
RBX2	383.4	0.011	SSZ2	23.9	0.12	PEX2	32.8	0.11
PDX2	383.8	0.0029	QHZ1	23.9	0.019	SSZ2	32.9	0.096
PCX1	1081.1	0.025	QDZ2	24.3	0.045	QDZ2	33.0	0.077
PEX2	1882.5	0.0022	PEX1	24.3	0.027	PEX1	33.0	0.024
PEX1	13309	0.00073	SSZ1	24.8	0.0026	SSZ1	33.2	0.0022
PKX2	7.2528e+05	0.0012	PKX2	30898	0.00087	PKX2	39691	0.0013

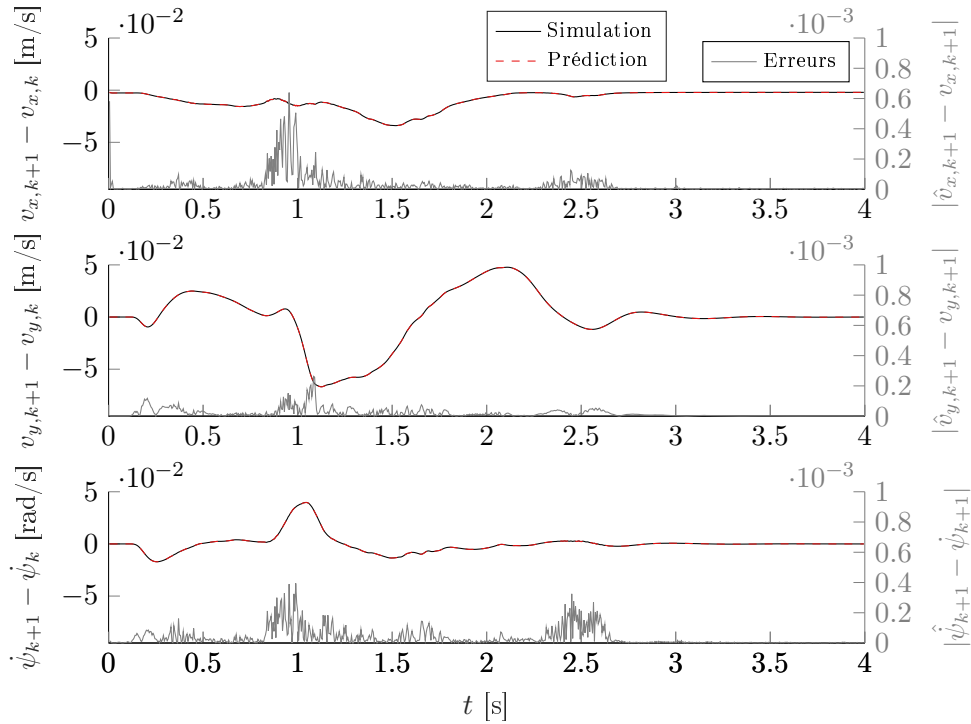
TABLE 4.2 – Résultats de l'analyse d'identifiabilité pour trois ensembles de manœuvres de sinus dwell. Les paramètres sont classés par ordre décroissant d'importance, les paramètres sélectionnés pour l'identification sont en gras. θ désigne un paramètre, γ est l'indice de colinéarité de la matrice de sensibilité construite avec tous les paramètres précédents et le paramètre désigné, et $\|\tilde{S}_y(\theta)\|_2$ est la racine de l'écart quadratique moyen de la matrice de sensibilité pour le paramètre désigné.

Afin de sélectionner les paramètres à optimiser pour l'ensemble des manœuvres de sinus dwell, l'étude est faite sur dix sinus dwell à différentes amplitudes (± 55 , ± 110 , ± 151 , 179 , $+193$, ± 270 degrés). Aux paramètres retenus par cette méthode sont ajoutés les paramètres principaux du comportement transitoire *PTY1* et *PTX1*, ainsi que le paramètre *PCX1*. Le paramètre *PCX1* semble peu identifiable d'après l'étude d'identifiabilité en partant de la simulation faite sur Car-Maker, mais puisque sa valeur initiale de 1 correspond à une adhérence qui reste maximale quand le glissement augmente, une légère variation a peu d'impact sur la manoeuvre. Par contre, pour des valeurs plus élevées, ce paramètre pourrait devenir plus influent. Il est donc également ajouté

à l'ensemble des paramètres à estimer.



(a) Manœuvre de sinus dwell simulée dans CarMaker avec les pressions mesurées en entrée.



(b) Comparaison entre la simulation et les prédictions faites par les équations (4.46) à (4.51).

FIGURE 4.15 – Exemple de manœuvre de sinus dwell et erreurs faites par la prédiction pour une amplitude maximum d'angle volant de 270 degrés, à droite.

Pour que la méthode d'identifiabilité permette de bien étudier l'influence des paramètres du pneu sur le comportement du véhicule, il est nécessaire de s'assurer que les équations (4.46) à (4.51) permettent de suffisamment approximer le modèle détaillé de CarMaker. Afin de valider que ces équations donnent des résultats suffisamment proches de la simulation, on peut considérer

l'exemple donné en figure 4.15 qui compare la prédiction construite avec les équations (4.49) à (4.51) avec les données d'une simulation du logiciel IPG CarMaker, pour une manœuvre de sinus dwell à très fort angle volant. La prédiction faite est tout à fait correcte.

L'approche proposée pour l'étude d'identifiabilité permet un gain de temps important : une approche plus simple en répétant des simulations sur le logiciel CarMaker pour des valeurs de paramètres différents nécessiterait 30 simulations prenant environ 40s chacune. Cela reviendrait à une durée totale d'une vingtaine de minutes dans le cas présenté ci-dessus, contre moins d'une minute pour la méthode proposée.

De plus, l'approche proposée permet d'obtenir la sensibilité aux paramètres le long de la trajectoire de référence puisqu'elle se base sur une erreur de prédiction. Au contraire, une approche plus simple en répétant des simulations évaluerait une différence entre les simulations avec paramétrage nominal et modifié, donc les trajectoires obtenues seraient différentes. La sensibilité aux paramètres ne serait alors plus évaluée le long de la trajectoire nominale.

Par ailleurs, un résultat intermédiaire de l'approche d'identifiabilité proposée ici est de pouvoir étudier l'influence des paramètres dans le temps au cours d'une manœuvre, comme par exemple en figure 4.16. Cet aspect n'est pas développé plus dans la thèse, mais permettra aux ingénieurs de plus facilement investiguer l'influence des paramètres des modèles de pneumatique sur le comportement du véhicule au cours des manœuvres.

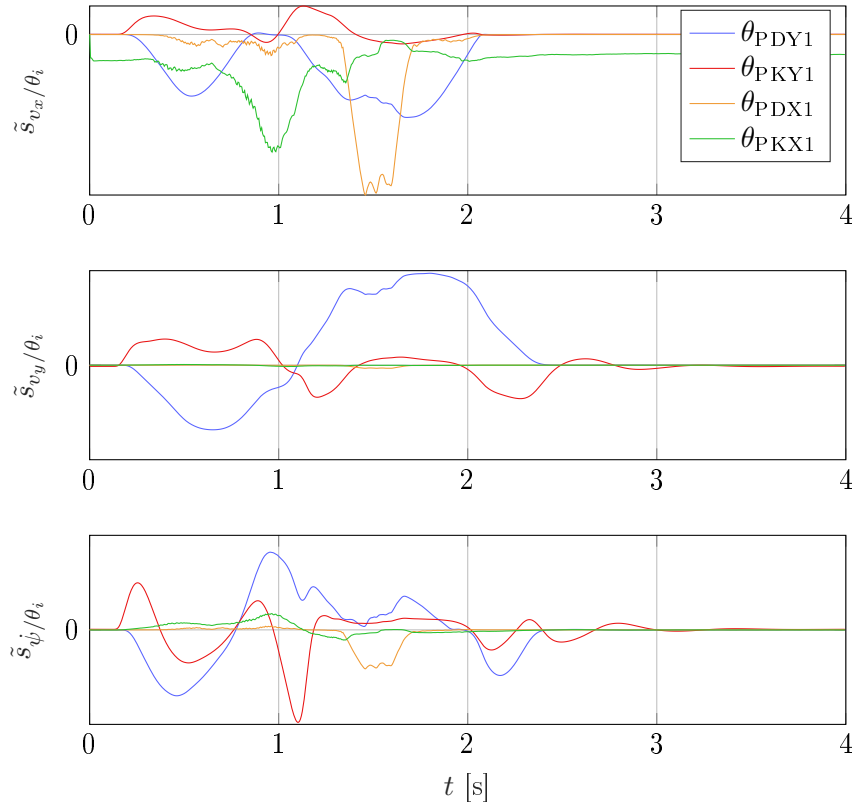


FIGURE 4.16 – Fonctions de sensibilité pour l'étude de l'influence des paramètres dans le temps, pour une manœuvre de sinus à une amplitude de -151 degrés.

4.10 Limitations pour l'utilisation de l'algorithme EM

Dans cette section, nous envisageons d'utiliser l'algorithme EM pour recaler les paramètres des modèles de pneus avant et arrière. Nous évoquons tout d'abord la principale difficulté : l'impossibilité d'utiliser le modèle haute fidélité d'IPG CarMaker directement avec l'algorithme EM. Un modèle relativement simple lui est substitué et nous tentons ensuite d'estimer les paramètres à partir de données produites en simulation ; ainsi nous pouvons comparer les valeurs estimées avec les valeurs du modèle de référence. Cette approche s'avère finalement insuffisante.

4.10.1 Contrainte d'initialisation de l'état dans CarMaker

Les approches d'erreur de prédiction, algorithme EM, erreur de simulation avec tirs multiples et paramètres dans l'état augmenté en appliquant un lissage sont impossibles à mettre en œuvre directement en utilisant le modèle implémenté dans le logiciel IPG CarMaker. En effet, ce modèle ne peut être initialisé qu'à l'arrêt ou en ligne droite à vitesse constante. Le logiciel calcule alors lui-même l'état initial en cherchant la position d'équilibre du système (débattement des suspensions, position et orientation de la caisse). Il est donc possible d'effectuer des simulations avec ce modèle haute fidélité, mais il est impossible d'initialiser son état à un point de fonctionnement particulier pour évaluer sa dynamique, comme on évalue les équations de processus et de mesure dans la plupart des méthodes d'estimation.

4.10.2 Approximation par un modèle à 7 ddl

Afin de tout de même pouvoir utiliser l'algorithme EM pour les tests de l'ESC qui allient dynamique latérale et dynamique longitudinale, nous envisageons d'identifier les paramètres sur un modèle plus complexe que le modèle bicyclette utilisé au chapitre 3, mais plus simple que le modèle d'IPG CarMaker. Les paramètres alors obtenus avec ce modèle à 7 ddl seraient ensuite utilisés dans le modèle CarMaker sur bancs de tests HIL. Le modèle considéré comprend donc 7 degrés de liberté $v_x, v_y, \dot{\psi}, \omega_{fl}, \omega_{fr}, \omega_{rl}, \omega_{rr}$, c'est le modèle décrit à la section 1.4.2. Les dynamiques de roulis et de tangage ne sont pas présentes, mais le transfert de charge est approximé à partir des accélérations (équation (1.50)). Les efforts et moments F_x, F_y, M_y, M_z à chaque roue sont calculés par le modèle *Magic Formula 5.2* sans la partie transitoire et avec un angle d'inclinaison nul.

4.10.3 Invalidation de l'approche EM

Afin de valider ou invalider cette approche, nous considérons le problème suivant : une simulation est réalisée dans le logiciel CarMaker avec un certain paramétrage du modèle de pneu, l'objectif étant de retrouver ces paramètres avec l'algorithme EM. Nous considérons le cas où les signaux $v_x, v_y, \dot{\psi}$ sont disponibles et les vitesses de roue sont inconnues, ce qui est le cas lors de l'utilisation des mesures réalisées sur véhicule physique, les mesures de vitesse de roue n'étant pas enregistrées. En premier lieu, nous nous assurons qu'il est bien possible d'obtenir une estimation suffisante des vitesses des roues, en supposant le paramétrage connu. Ensuite nous cherchons à identifier des paramètres liés au comportement latéral, puis longitudinal.

Estimation des vitesses des roues

Nous appliquons un lissage RTS avec le modèle à 7 ddl et la bonne paramétrisation des modèles de pneu. Les matrices de covariance sont réglées comme

$$R = 10^{-4}I_3 \quad Q = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{pmatrix} \quad P_0 = Q \quad (4.55)$$

La figure 4.17 nous montre que c'est approximativement le cas. On peut observer sur l'estimation de la vitesse de la roue avant droite des oscillations, dues à la dynamique rapide des roues

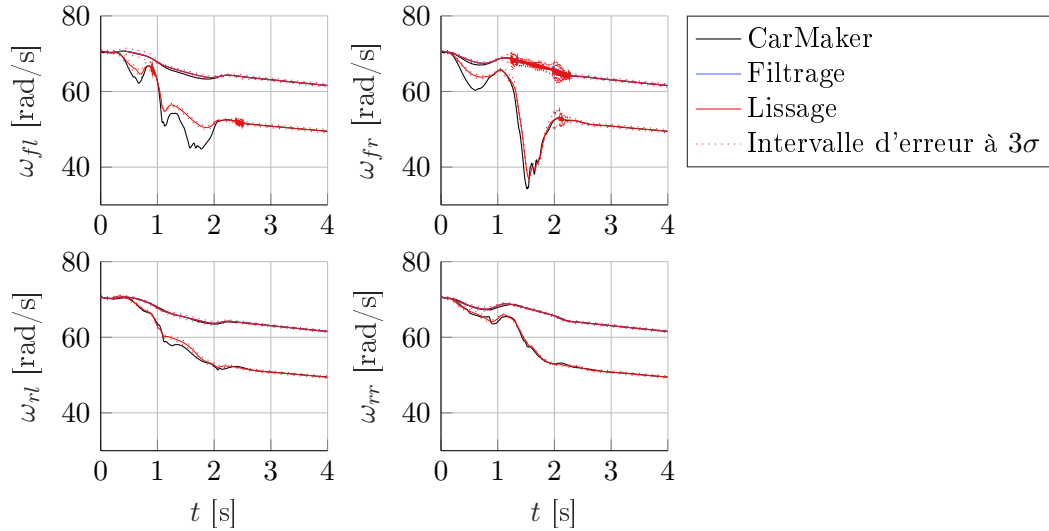


FIGURE 4.17 – Estimation des vitesses des roues par filtrage et lissage pour les sinus dwell à -83 (freinage ESC très faible, les vitesses restent élevées) et -270 degrés (freinage ESC fort, les vitesses diminuent).

Estimation des paramètres

Comportement latéral. Nous vérifions ici si l'algorithme EM est capable de retrouver les valeurs des paramètres $PKY1$, $PKY2$, $PDY1$ des pneus avant et arrières, en ajustant des paramètres θ_{PKY1} , θ_{PKY2} , θ_{PDY1} qui modifient simultanément les paramètres des roues avant et arrières au travers de l'équation (4.44). L'algorithme est utilisé avec des valeurs initiales volontairement perturbées pour ces trois paramètres, la valeurs de $\theta = 0$ correspondant aux paramètres utilisées dans la simulation de référence. Sur la figure 4.18, on peut voir que l'algorithme estime correctement les paramètres $PKY1$ et $PDY1$ mais ne converge pas vers la bonne valeur pour le paramètre $PKY2$.

Comportement longitudinal. Nous vérifions si l'algorithme permet de recalculer les paramètres $PKX1$ et $PDX1$. Nous utilisons alors la même procédure qu'en latéral. À partir de la figure 4.19, nous constatons que l'algorithme converge vers de mauvaises valeurs. Ceci semble être dû aux différences encore trop importantes entre le modèle utilisé à 7 ddl et le modèle CarMaker. Pour la suite, nous utiliserons donc la seule méthode qui permet d'utiliser directement le modèle

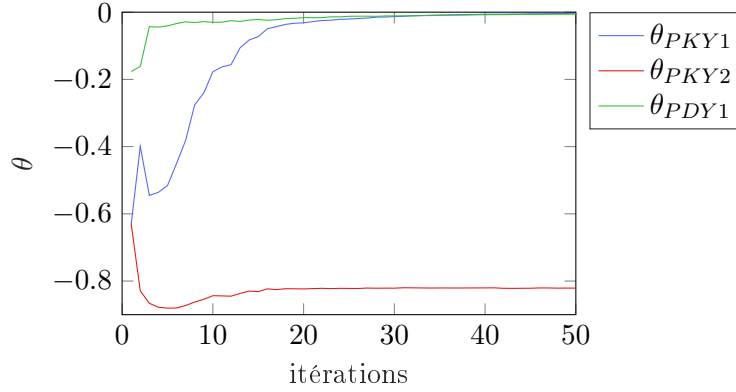


FIGURE 4.18 – Estimation des paramètres PKY1, PKY2 et PDY1 à partir des sinus dwell à ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179 , 193 , ± 270 degrés.

CarMaker (sans passer par un modèle intermédiaire) pour optimiser les paramètres : l'erreur de simulation.

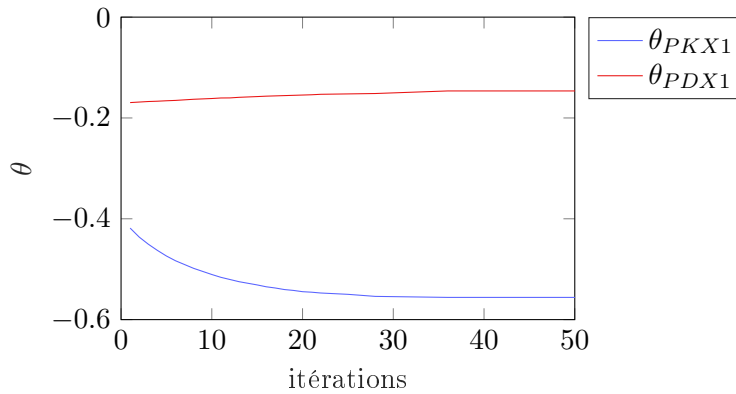


FIGURE 4.19 – Estimation des paramètres PKX1 et PDX1 à partir des sinus dwell à ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179 , 193 , ± 270 degrés.

4.11 Minimisation de l'erreur de simulation sur les manœuvres de sinus dwell

L'approche par minimisation de l'erreur de simulation est la seule qui puisse directement faire usage du modèle implémenté dans CarMaker. Par ailleurs, la méthode de recalage manuelle s'approche plus de cette méthode que des autres. Cette approche permet donc de garder un processus quelque peu similaire à la méthode de recalage manuelle. On définit, dans un premier temps, les manœuvres pour lesquelles on souhaite optimiser les paramètres. Nous choisissons ici les amplitudes ± 55 , ± 110 , ± 151 , -179 , $+193$, ± 270 degrés d'angle volant. Les autres manœuvres serviront de jeu de validation. Les paramètres à optimiser sont ceux obtenus par l'analyse d'identifiabilité et présentés dans le tableau 4.2.

Afin d'estimer les paramètres, l'algorithme d'optimisation quadratique successive implémenté dans la fonction Matlab *fmincon* (option *active-set*), est utilisé. Cet algorithme réalise la partie

« optimisation » de l'ensemble du processus décrit dans la figure 4.20 ci-après.

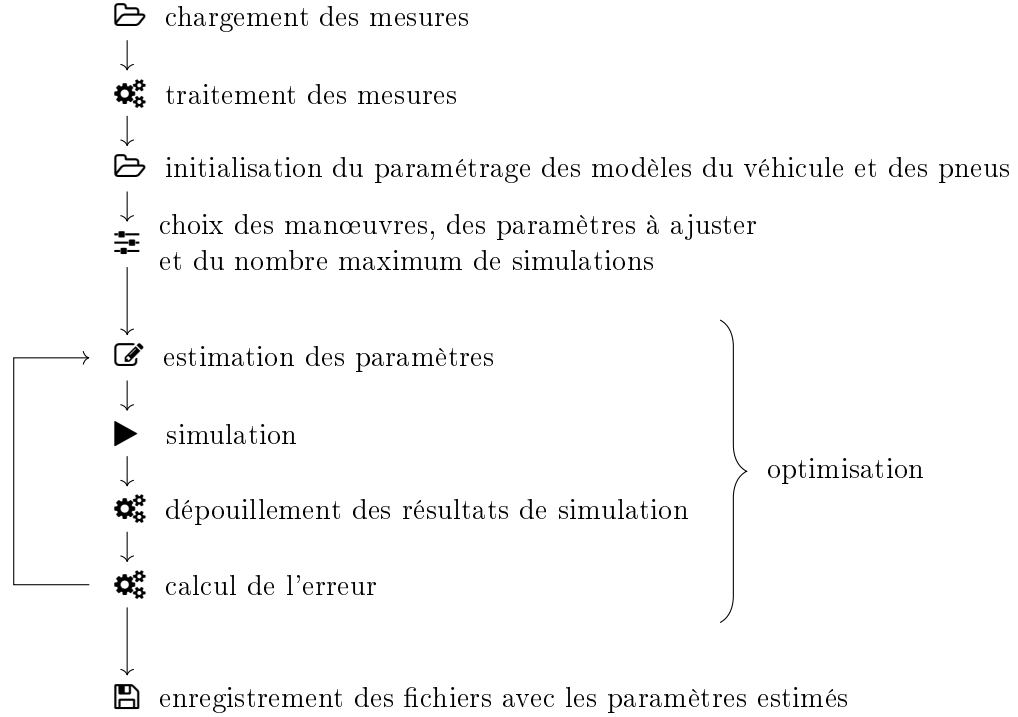


FIGURE 4.20 – Étapes du processus de recalage des paramètres.

La fonction coût proposée est

$$J(\theta) = 0.7 \frac{\|\dot{\psi}^{\text{mes}} - \dot{\psi}^{\text{sim}}(\theta)\|_2}{\sigma(\dot{\psi}^{\text{mes}})} + 0.25 \frac{\|\alpha_R^{\text{mes}} - \alpha_R^{\text{sim}}(\theta)\|_2}{\sigma(\alpha_R^{\text{mes}})} + 0.05 \frac{\|v_x^{\text{mes}} - v_x^{\text{sim}}(\theta)\|_2}{\sigma(v_x^{\text{mes}})}. \quad (4.56)$$

Cette fonction coût utilise la normalisation par l'écart-type, c'est la forme présentée à l'équation (2.150). Plusieurs choix sont faits pour obtenir cette fonction :

- la fonction coût repose sur les signaux considérés de première importance en dynamique du véhicule, à savoir : la vitesse de lacet, la dérive et la vitesse longitudinale. Ces trois signaux offrent l'avantage d'être peu bruités.
- L'utilisation du signal d'accélération latérale très bruité n'est pas retenue dans la fonction de coût puisque celui-ci est directement corrélé à la dérive, la vitesse de lacet et la vitesse longitudinale.
- La pondération de ces trois erreurs quadratiques normalisées est réalisée à travers le choix des coefficients (0.7 – 0.25 – 0.05). La pondération de 0.7 pour l'erreur de vitesse de lacet est justifiée par son rôle important pour l'essai considéré (c'est un critère d'homologation du sinus dwell). La pondération de 0.25 sur l'erreur en dérive permet de compléter la description de la dynamique latérale du véhicule. Enfin, la vitesse longitudinale est ajoutée avec un faible coefficient afin de capturer au moins un peu la dynamique longitudinale, bien que le comportement longitudinal des pneus soit également capturé avec le lacet lorsque l'ESC freine indépendamment chacune des roues. Ce compromis (0.7 – 0.25 – 0.05) a été choisi en très peu d'itérations et pourra être affiné pour d'autres jeux d'essais.

Les mesures de vitesse de lacet, de dérive et de vitesse longitudinale obtenues pour les manœuvres de sinus dwell réalisées avec les amplitudes maximum d'angle volant ± 55 , ± 110 , ± 151 ,

-179 , $+193$, ± 270 degrés, sont utilisées pour estimer les paramètres des modèles de pneus. L'optimisation a ici réalisé 722 simulations avant de converger vers les valeurs finales des paramètres, pour une durée de 7,5 heures.

La table 4.3 présente l'ensemble des paramètres estimés pour le modèle pneu des pneus avant. Puisqu'une variable d'optimisation commune a permis d'optimiser les paramètres avant et arrière à travers l'équation (4.44), les paramètres du modèle des pneus arrières ont été ajustés dans les mêmes proportions que pour les pneus avant.

Les figures 4.21, 4.22 et 4.23 comparent les mesures réalisées avec les simulations faites sous CarMaker pour les manœuvres de sinus dwell avec un premier pic d'angle volant à $+110$ et $+179$ degrés. Les mesures obtenues sur véhicule réel sont représentées en noir. En bleu, le modèle simulé sous CarMaker utilise le jeu de paramètre pneu initial. En vert, le modèle simulé sous CarMaker utilise le jeu de paramètre pneus avant et arrières optimisé manuellement. En rouge, le modèle simulé sous CarMaker utilise le jeu de paramètre pneus avant et arrières optimisé avec la méthode de minimisation de l'erreur de simulation détaillée précédemment. Dans les figures apparaissent également les pressions de freinage générées par l'ESC lors de la manœuvre. Ce sont ces pressions de freinage mesurées qui sont utilisées en entrée de la simulation.

paramètres	valeurs issues de la Flat-Trac	valeurs finales
PKY1	-31.4	-34.3
PDY1	1.13	1.07
PCY1	1.7	1.17
RBX1	20.0	7.7
QCZ1	1.17	1.1
PKX1	43.0	15.00
PKY2	-0.00049	2.8
RBY1	16.8	20
PDY2	-0.17	-0.16
RBX2	19.5	9.3
QDZ1	0.10	0.13
PDX1	1.17	0.85
PKX3	0.75	0.70
QEZ1	-1.3	-1.18
PCX1	1.1	1.01
PTX1	0.12	0.12
PTY1	2.5	2.5

TABLE 4.3 – Paramètres initiaux et estimés pour les pneus avant.

4.12 Validation de la méthode fondée sur la minimisation de l'erreur de simulation

La validation de la méthode d'estimation fondée sur la minimisation de l'erreur de simulation se fait à deux niveaux :

- d'une part la validation est faite en simulation avec les pressions mesurées en entrée, pour les manœuvres qui n'ont pas été utilisées lors de l'apprentissage des paramètres ;

— d'autre part la validation est réalisée sur banc de test HIL, qui est l'objectif final poursuivi.

4.12.1 Validation en simulation

Le modèle CarMaker recalé avec les paramètres estimés des modèles de pneu avants et arrières, est testé pour validation sur les essais de sinus dwell d'amplitudes ± 41 , ± 83 , ± 138 , ± 165 , -206 , 220 , -234 , 248 , -261 degrés d'angle volant maximum. Le tableau 4.4 donne les erreurs sur la vitesse de lacet, la dérive et la vitesse longitudinale, utilisées dans la fonction coût de la méthode de minimisation de l'erreur de simulation. Le tableau 4.5 donne les erreurs sur la vitesse latérale, l'accélération latérale et le roulis. Les erreurs sont données pour les différents jeux de paramètres initial, optimisé manuellement et automatiquement, en séparant jeux d'apprentissage et de validation. Les figures 4.24, 4.25 et 4.26 permettent également de comparer les performances des modèles avec les différents paramétrages.

Le modèle obtenu par la méthode automatique proposée est comparé au modèle initial et au modèle recalé avec la méthode manuelle habituellement utilisée. Pour la méthode manuelle, un ingénieur expert sur la dynamique du véhicule et le modèle pneu ajuste itérativement les paramètres. Il utilise pour cela une procédure établie, ses connaissances et son expérience. L'obtention du modèle peut nécessiter de deux à six semaines de travail, voire plus (selon si des projets précédents ont utilisé le même pneumatique par exemple).

Sur le tableau 4.4, les simulations faites avec le paramétrage obtenu par la méthode d'estimation automatique ont, globalement, une erreur plus faible que les autres paramétrages.

4.12.2 Validation en Hardware-In-the-Loop

Finalement, les paramètres initiaux, recalés manuellement et recalés avec la méthode proposée utilisant l'erreur de simulation, sont utilisés pour des tests sur banc HIL.

Pour les manœuvres de sinus dwell avec une amplitude d'angle volant maximum inférieure à 110 degrés, l'ESC n'intervient pas (pour ce véhicule particulier), les résultats sont donc exactement les mêmes qu'en simulation. Pour les angles plus importants, les manœuvres sont répétées trois fois pour le paramétrage obtenu par l'approche proposée, afin d'avoir un aperçu de la répétabilité des tests HIL. Sur banc HIL, contrairement à la simulation, répéter une même manœuvre plusieurs fois donne des résultats différents. Ceci est dû à plusieurs phénomènes : l'ESC a une horloge interne et un pas de calcul avec une cadence qui n'est pas accordée à celle de l'unité de calcul du banc HIL, et les actions de l'ESC sur les électrovannes sont mesurées par des capteurs à effet Hall qui peuvent être légèrement perturbées par le champ magnétique environnant et la précision interne des capteurs. Ces légères différences peuvent avoir un impact assez important lors de manœuvres où la dynamique du véhicule est instable.

Les résultats de validation sur banc HIL pour quelques manœuvres sont donnés sur les tableaux 4.6 et 4.7 (l'erreur est calculée avec la première des trois répétitions pour les résultats de la méthode proposée). Les figures 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31 et 4.32 montrent la comparaison des mesures avec les résultats obtenus sur banc HIL pour le paramétrage obtenu par optimisation manuelle et trois répétitions du paramétrage obtenu par la méthode proposée.

Les résultats obtenus sur bancs HIL viennent mitiger les résultats de simulation avec les pressions des freins utilisées en entrée. En effet, l'écart entre les performances obtenues par le paramétrage obtenu manuellement θ_{man} et le paramétrage de la méthode proposée θ_{aut} est grandement réduit. Sur les angles faibles (< 130 degrés) et sur les angles très forts (> 250 degrés) le paramétrage θ_{aut} donne un modèle plus représentatif. Toutefois, aux angles intermédiaires, l'écart entre les deux paramétrage est plus difficile à différencier. D'une part, en étudiant uniquement

les signaux de la dynamique latérale du véhicule (vitesse de lacet, dérive, vitesse latérale, accélération latérale, roulis) le paramétrage θ_{man} semble meilleur. D'un autre côté, en considérant également la dynamique longitudinale et l'action de l'ESC, il semble que le modèle avec le paramétrage θ_{aut} offre une correction de l'ESC bien plus proche de celle observée en mesure, tandis que la correction sur le modèle ayant pour paramétrage θ_{man} est moins importante. Remarquons également que pour les raisons détaillées plus haut, la rétroaction de l'ESC peut varier d'un essai à un autre, ce qui semble notablement changer la réponse du véhicule aux angles supérieurs à 200 degrés.

4.13 Conclusion

Dans ce chapitre, les outils étudiés et développés aux chapitres précédents ont permis de répondre à une problématique industrielle. Toutefois, l'utilisation directe pour l'estimation des paramètres du modèle véhicule implémenté IPG CarMaker ne peut se faire qu'au travers de la méthode de minimisation de l'erreur de prédiction. Nous avons tout de même cherché à appliquer l'algorithme EM en substituant au modèle IPG CarMaker un modèle à 7 ddl, sans succès. La méthode de minimisation de l'erreur de simulation, avec au préalable une étude d'identifiabilité, a par contre permis d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants. La méthode implémentée exploite les mesures faites sur la boucle de rétroaction de l'ESC (les pressions freins) afin de s'affranchir des contraintes liées aux bancs HIL, rendant le processus de recalage encore plus rapide. Le temps pour effectuer le recalage des paramètres est donc réduit de plusieurs semaines (voire mois) à quelques jours, voire une ou deux semaines si plusieurs essais sont faits en modifiant la fonction coût pour améliorer les résultats. L'étape d'identifiabilité, en plus de permettre la sélection d'un nombre réduit de variables à optimiser, ce qui allège le problème, permet également aux ingénieurs de mieux comprendre l'influence des paramètres, dans différentes manœuvres, mais aussi dans le temps pour une manœuvre particulière.

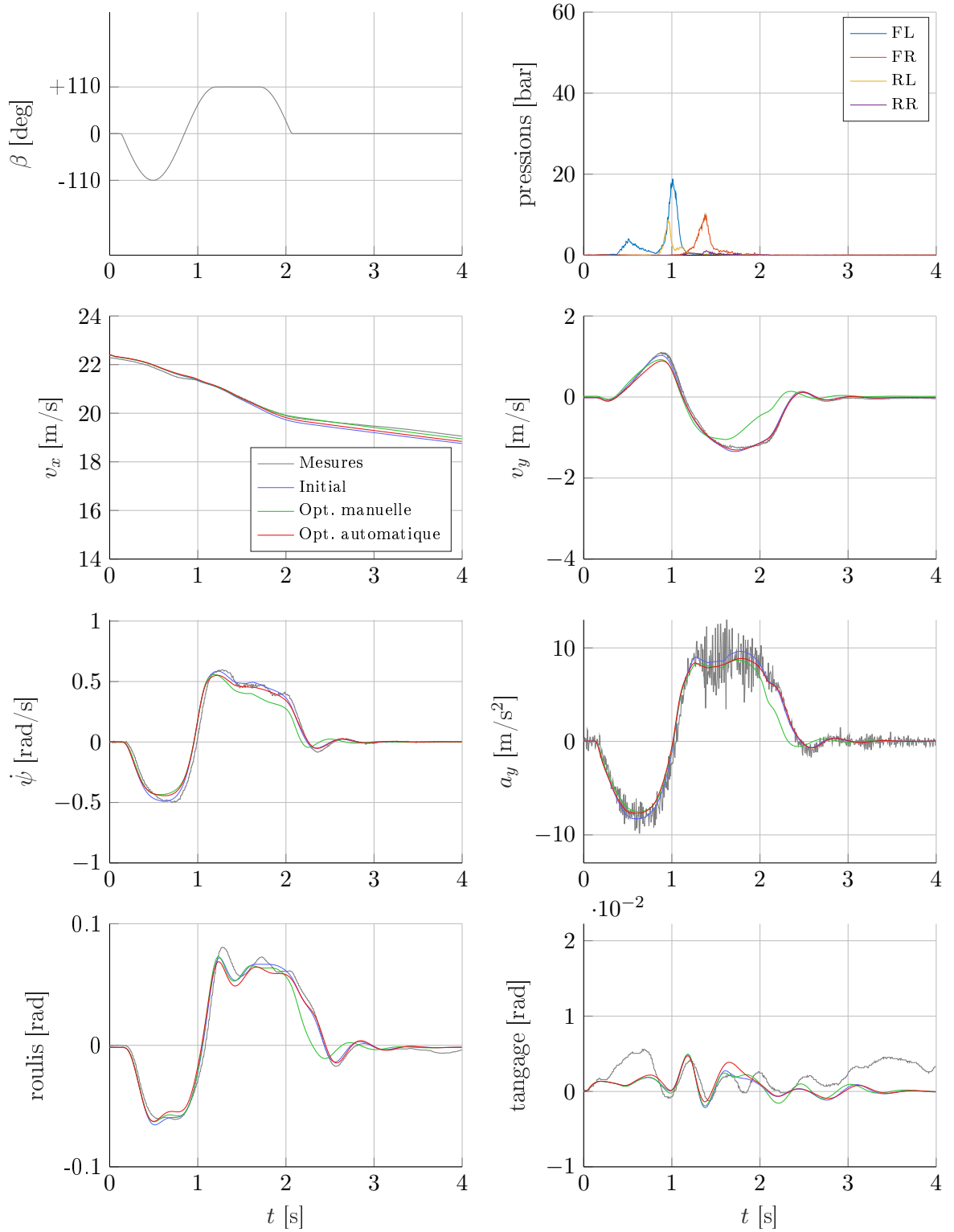


FIGURE 4.21 – Manœuvre de sinus dwell à -110 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

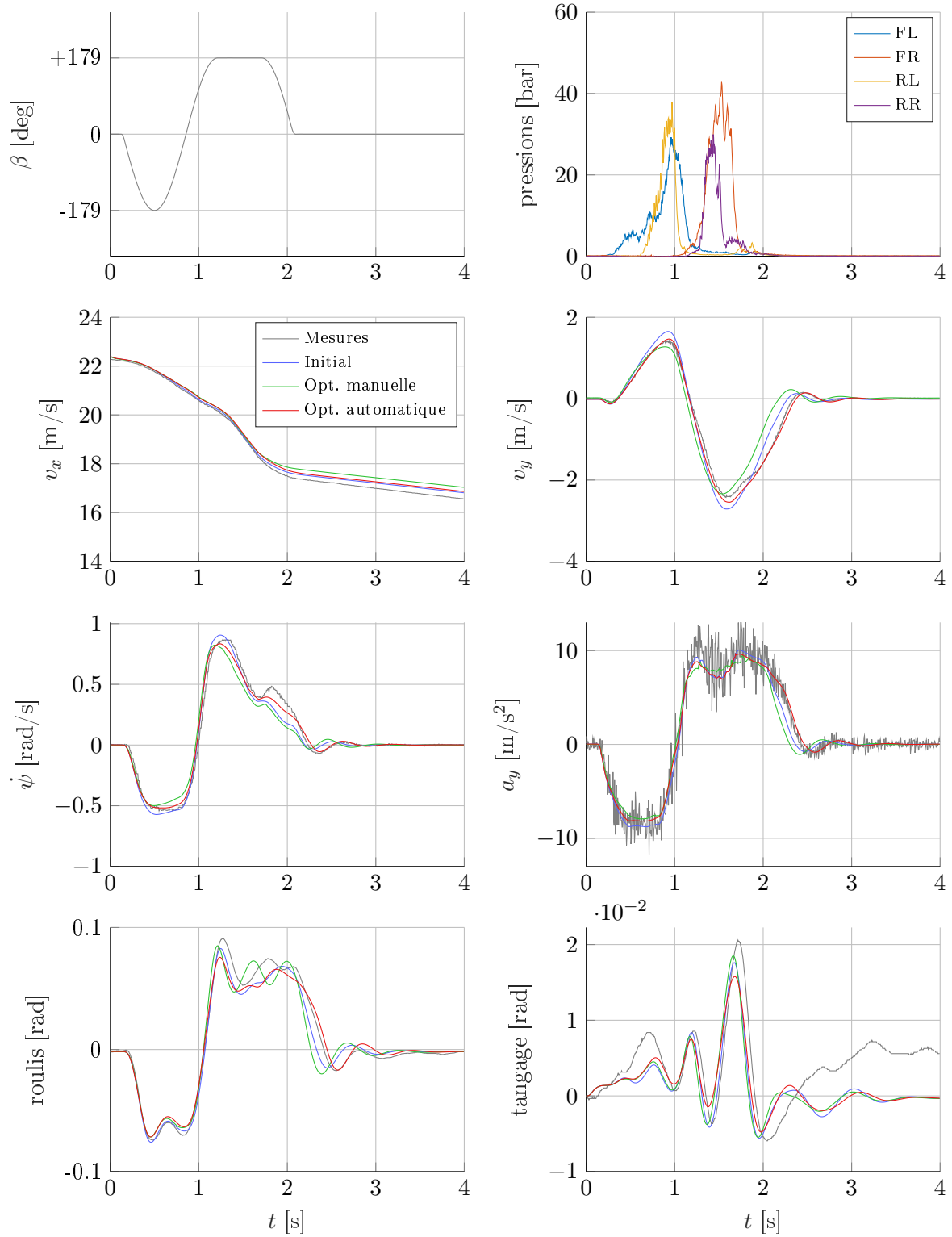


FIGURE 4.22 – Manœuvre de sinus dwell à -179 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

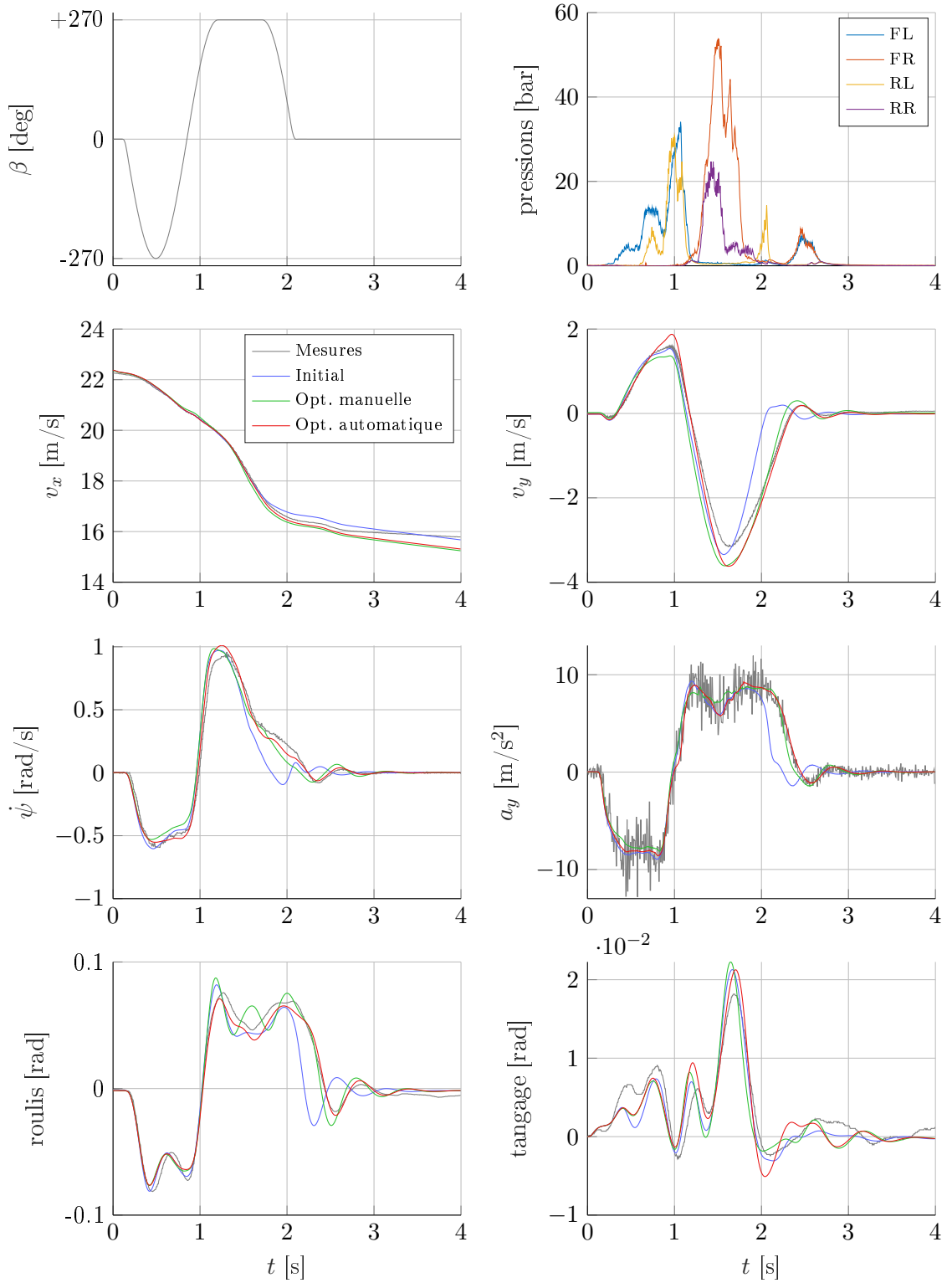


FIGURE 4.23 – Manœuvre de sinus dwell à -270 degrés. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

		$\ \dot{\psi}^{\text{mes}} - \dot{\psi}(\theta)\ _2$			$\ \alpha_R^{\text{mes}} - \alpha_R(\theta)\ _2$			$\ v_x^{\text{mes}} - v_x(\theta)\ _2$		
		θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}
jeu d'entraînement de θ_{aut}	-55	0.4	0.33	0.38	0.097	0.087	0.06	5.2	5.3	4.7
	55	0.38	0.3	0.35	0.1	0.11	0.061	4.8	5.1	4.3
	-110	1.1	1.8	1.2	0.13	0.45	0.16	5.6	2	3.9
	110	0.66	1.5	0.68	0.27	0.22	0.21	8.2	4.2	6.3
	-151	1.6	2.3	1.5	0.36	0.62	0.26	2.8	6	4.1
	151	1.3	2.5	1.1	0.3	0.62	0.11	5.7	10	6.1
	-179	1.7	2.5	1.2	0.33	0.59	0.11	4.6	9.3	6.1
	193	1.5	1.2	1.1	0.48	0.29	0.49	3.6	1.4	1.7
	-270	3.3	2.2	1.3	0.92	0.51	0.27	3.4	7.3	5.7
	270	3.6	2.4	1.1	1.3	0.61	0.23	9.7	3.5	1.8
somme		15	17	9.9	4.2	4.1	2.0	54	54	45
jeu de validation de θ_{aut}	-41	0.31	0.23	0.29	0.085	0.12	0.074	4.5	4.7	4.2
	41	0.35	0.26	0.33	0.086	0.085	0.056	4.4	4.7	4.1
	-83	0.41	0.59	0.49	0.18	0.079	0.11	3.2	2	2.1
	83	0.49	0.79	0.6	0.09	0.096	0.056	4.8	3.8	3.6
	-138	1.4	2.3	1.3	0.28	0.59	0.17	2.3	6	3.4
	138	0.81	1.7	0.97	0.18	0.39	0.22	1.3	5.2	1.4
	-165	1.8	2.7	1.2	0.48	0.83	0.2	3.7	8.6	3.9
	165	0.87	1.8	0.78	0.25	0.48	0.083	3.9	8	5.6
	-206	2	2.2	1.3	0.4	0.47	0.15	2.5	4.5	3.8
	220	2.5	2.7	1.3	0.93	0.9	0.51	10	11	9.5
	-234	2.6	2.1	0.97	0.81	0.59	0.16	3.6	2.3	2
	248	2.7	1.8	1.2	0.63	0.39	0.47	6	2.6	1.2
	-261	3	1.8	1.1	0.99	0.46	0.22	2.9	9.4	8.4
somme		19	21	12	5.4	5.5	2.5	53	73	53

TABLE 4.4 – Erreurs sur la vitesse de lacet, la dérive à l'essieu arrière et la vitesse longitudinale pour les paramétrages initial, optimisé manuellement et optimisé automatiquement. Les manœuvres sont effectuées en simulation (pressions mesurées en entrée).

		$\ v_y^{\text{mes}} - v_y(\theta)\ _2$			$\ a_y^{\text{mes}} - a_y(\theta)\ _2$			$\ \phi^{\text{mes}} - \phi(\theta)\ _2$		
		θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{init}	θ_{man}	θ_{aut}
jeu d'entraînement de θ_{aut}	-55	1.8	1.9	1.2	14	13	14	0.072	0.073	0.08
	55	1.9	2.2	1.2	14	14	14	0.053	0.059	0.065
	-110	1.5	7	1.9	33	42	34	0.14	0.27	0.18
	110	5.3	3.9	4.6	19	26	22	0.12	0.18	0.17
	-151	5.4	9.5	3.5	47	53	44	0.22	0.34	0.18
	151	4.6	8.9	1.4	34	46	32	0.19	0.34	0.18
	-179	5.1	8.3	2.2	38	46	37	0.21	0.33	0.19
	193	8.7	6	8.4	32	30	37	0.21	0.21	0.24
	-270	13	8.8	5.3	56	38	35	0.47	0.23	0.14
	270	17	9.1	4.4	60	39	31	0.57	0.32	0.21
somme		64	66	34	347	347	299	2.2	2.3	1.7
jeu de validation de θ_{aut}	-41	1.7	2.5	1.6	13	12	13	0.056	0.059	0.063
	41	1.5	1.7	0.94	13	13	13	0.063	0.066	0.07
	-83	3.6	2	2.6	20	20	21	0.095	0.066	0.12
	83	1.6	1.6	0.89	18	21	19	0.052	0.079	0.096
	-138	4.3	8.8	2.4	35	45	33	0.19	0.33	0.18
	138	3.4	5.6	3.8	27	35	30	0.14	0.25	0.19
	-165	7	12	2.9	46	60	39	0.28	0.44	0.18
	165	4.5	7.3	1.6	29	36	28	0.18	0.27	0.18
	-206	6.3	7.3	3.2	37	38	32	0.26	0.28	0.21
	220	13	13	7.5	55	53	39	0.47	0.44	0.28
	-234	11	8.8	2.9	58	49	41	0.43	0.3	0.12
	248	9	7.7	8.6	49	39	42	0.36	0.19	0.23
	-261	14	7.4	3.8	59	35	33	0.5	0.2	0.13
somme		81	86	43	459	455	383	3.1	3.0	2.0

TABLE 4.5 – Erreurs sur la vitesse latérale, l'accélération latérale et le roulis pour les paramétrages initial, optimisé manuellement et optimisé automatiquement. Les manœuvres sont effectuées en simulation (pressions mesurées en entrée).

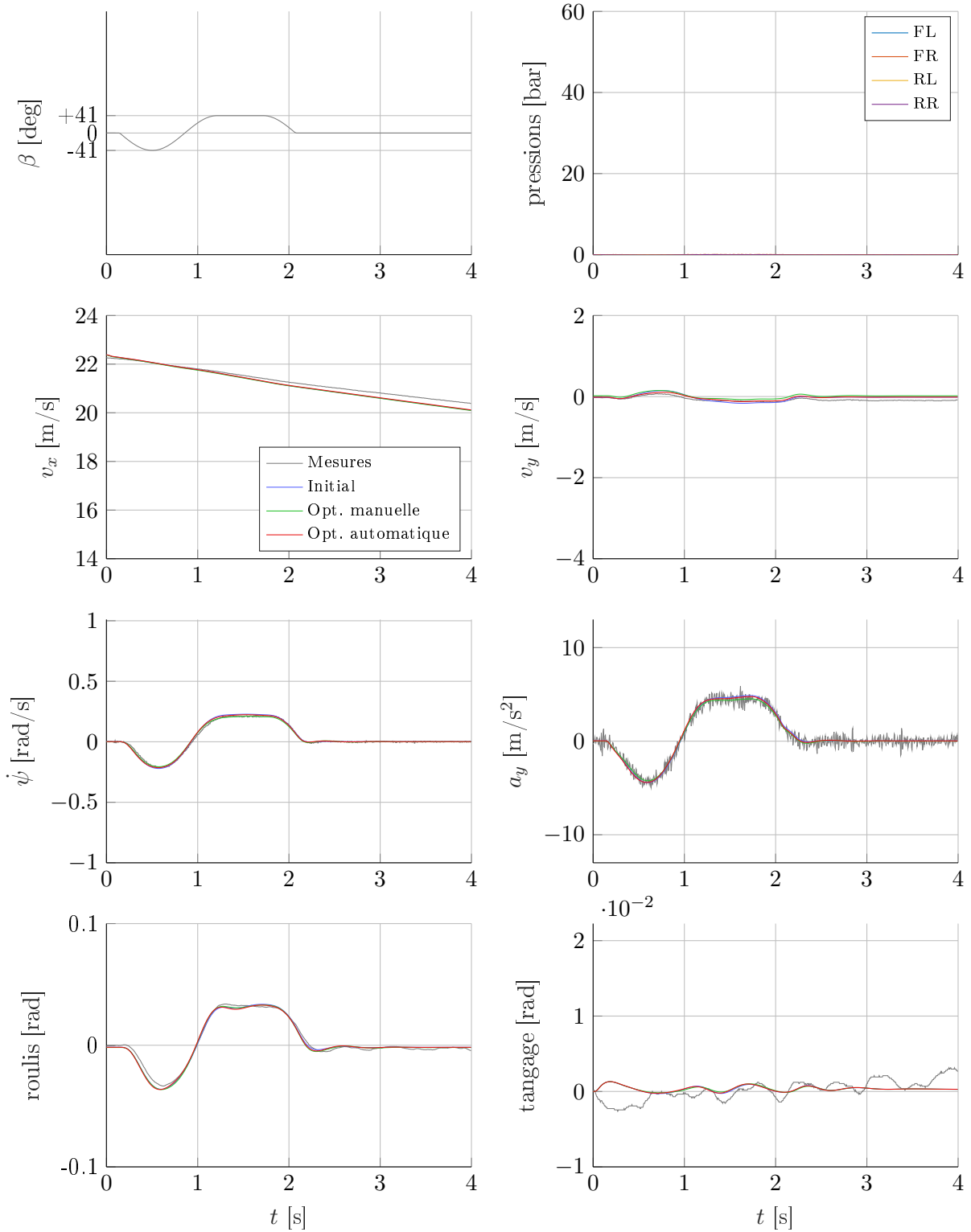


FIGURE 4.24 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -41 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

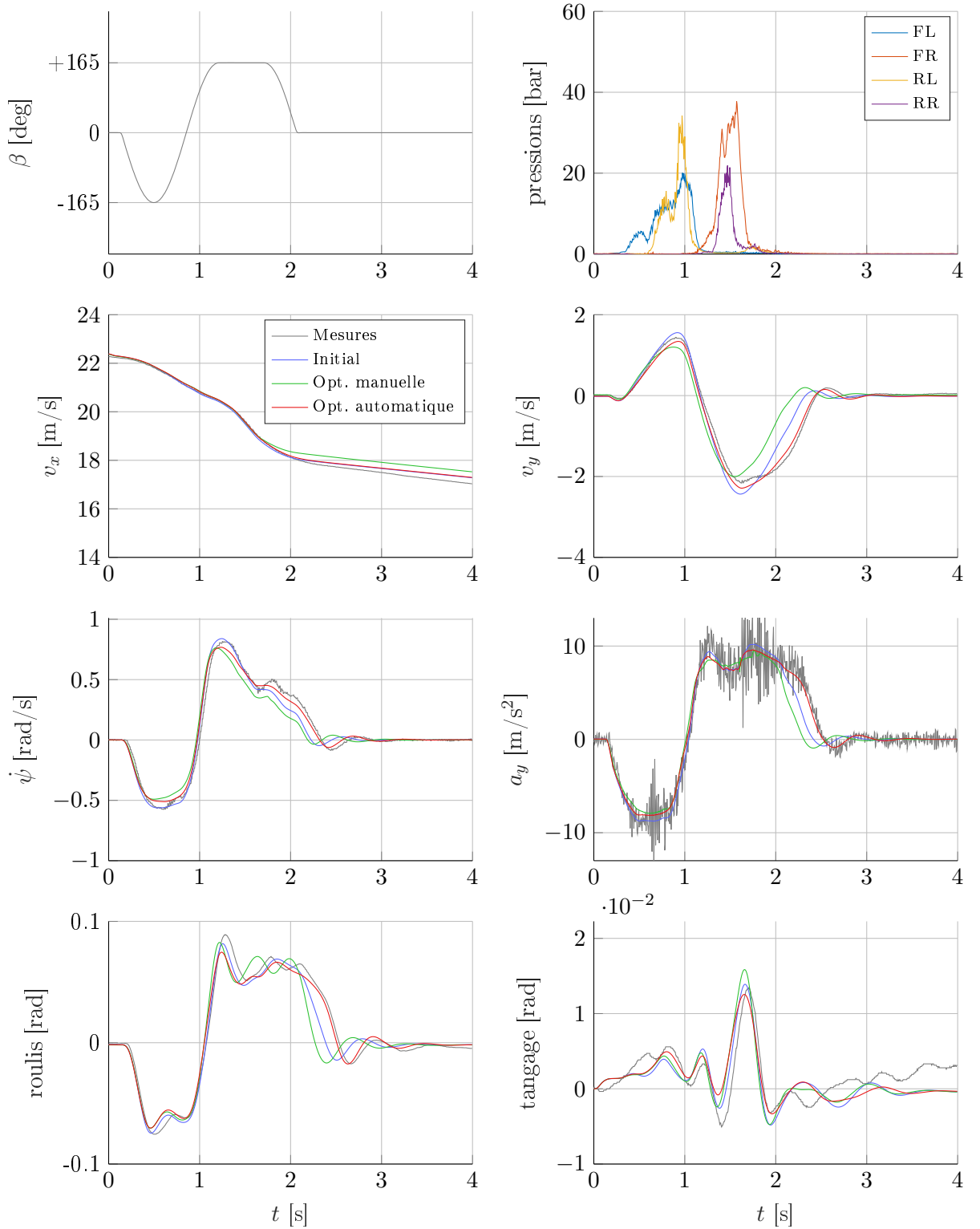


FIGURE 4.25 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -165 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

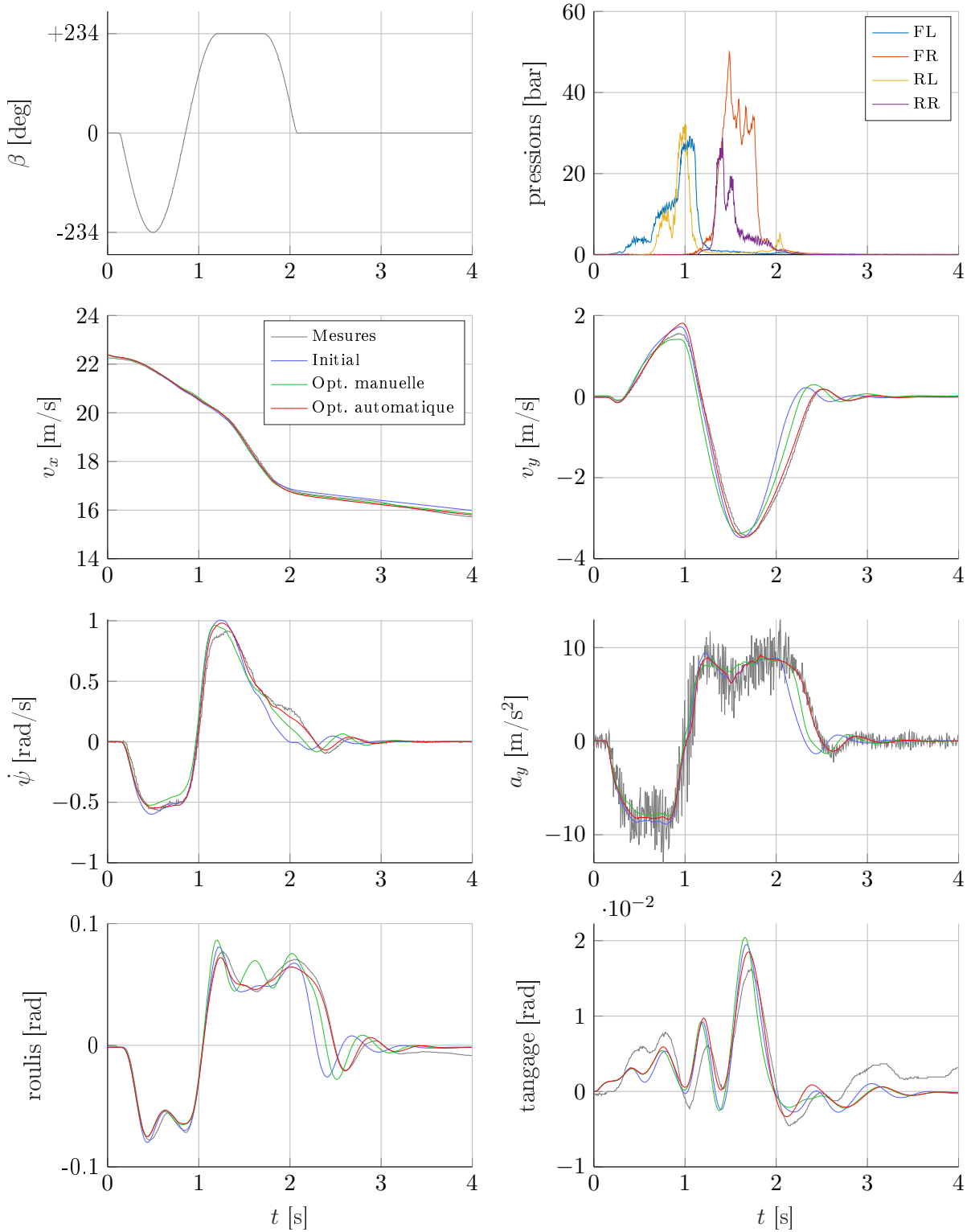


FIGURE 4.26 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -234 degrés d'angle volant au premier pic. Les mesures sont représentées en noir. Les simulations en bleu, vert et rouge sont faites en utilisant l'angle volant et les pressions aux freins comme entrées.

	$\ \dot{\psi}^{\text{mes}} - \dot{\psi}(\theta)\ _2$		$\ \alpha_R^{\text{mes}} - \alpha_R(\theta)\ _2$		$\ v_x^{\text{mes}} - v_x(\theta)\ _2$	
	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{man}	θ_{aut}
-41	0.42	0.42	0.11	0.077	6.6	6.6
41	0.44	0.45	0.065	0.059	6	5.9
-55	0.58	0.53	0.079	0.064	6.3	6.4
55	0.59	0.53	0.075	0.065	5.9	6
-83	0.95	0.67	0.084	0.12	1.5	2.6
83	1.1	0.76	0.16	0.073	3.6	4.8
-110	2	1.2	0.4	0.19	5.2	2.6
110	1.8	0.74	0.25	0.23	2.9	6.9
-138	2.1	1.5	0.31	0.2	16	7.4
138	1.4	1.2	0.15	0.38	19	9.2
-151	1.7	1.1	0.21	0.25	19	11
151	1.7	1.3	0.18	0.42	24	6.4
-165	1.9	1.5	0.3	0.28	20	6.8
165	1.2	1.5	0.21	0.39	23	9.3
-179	1.8	1.3	0.23	0.11	26	12
193	1.3	1.7	0.3	0.7	5.2	4.5
-206	1.5	1.3	0.36	0.67	17	2.9
220	1.8	1.6	0.26	0.5	30	13
-234	1.8	1.5	0.46	0.29	21	3.4
248	1.7	1.9	0.2	0.38	19	4.6
-261	1.9	1.5	0.51	0.24	14	9
-270	1.9	1.5	0.31	0.24	19	2.7
270	2	1.7	0.44	0.3	25	3.2
somme	33	27	5.7	6.2	333	148

TABLE 4.6 – Erreurs sur la vitesse de lacet, la dérive à l'essieu arrière et la vitesse longitudinale pour les paramétrages optimisé manuellement et optimisé automatiquement. Les manœuvres sont effectuées sur banc HIL (rétroaction avec un ESC réel).

	$\ v_y^{\text{mes}} - v_y(\theta)\ _2$		$\ a_y^{\text{mes}} - a_y(\theta)\ _2$		$\ \phi^{\text{mes}} - \phi(\theta)\ _2$		$\ y_{T_{\text{BOS}}}^{\text{mes}} - y_{T_{\text{BOS}}}(\theta)\ _2$	
	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{man}	θ_{aut}	θ_{man}	θ_{aut}
-41	2.3	1.6	14	14	0.074	0.08	0.12	0.25
41	1.3	0.9	14	14	0.084	0.084	0.26	0.34
-55	1.5	1.2	15	15	0.092	0.095	0.05	0.10
55	1.6	1.2	16	15	0.089	0.085	0.001	0.10
-83	1.4	2.6	23	21	0.099	0.12	0.25	0.07
83	1.9	0.94	25	21	0.14	0.12	0.20	0.10
-110	5.6	2.9	41	35	0.27	0.19	0.28	0.05
110	4.1	5	30	22	0.22	0.17	0.42	0.53
-138	4.3	2.2	36	33	0.21	0.19	0.58	0.31
138	3.6	6.8	29	34	0.18	0.24	0.46	0.33
-151	4.5	5.1	44	45	0.18	0.18	0.15	0.15
151	5.3	7.4	35	40	0.2	0.28	0.25	0.16
-165	5.4	3.8	41	41	0.21	0.21	0.19	0.07
165	5.8	6	32	38	0.22	0.28	0.014	0.06
-179	5.5	2.7	41	37	0.25	0.21	0.28	0.012
193	6.9	11	32	46	0.21	0.31	0.46	0.34
-206	7.8	12	38	43	0.3	0.35	0.16	0.13
220	3.7	8.1	37	36	0.24	0.23	0.18	0.07
-234	6.2	4.8	44	41	0.2	0.16	0.07	0.40
248	4.4	6.6	41	42	0.21	0.23	0.31	0.17
-261	7	4.3	37	34	0.21	0.15	0.38	0.02
-270	4.7	4.4	38	37	0.2	0.17	0.27	0.09
270	5.6	5.7	34	32	0.24	0.22	0.01	0.16
somme	101	107	738	738	4.3	4.4	5.34	4.02

TABLE 4.7 – Erreurs sur la vitesse latérale, l'accélération latérale, le roulis et le critère de déport pour les paramétrages initial, optimisé manuellement et optimisé automatiquement. Les manœuvres sont effectuées sur banc HIL (rétroaction avec un ESC réel).

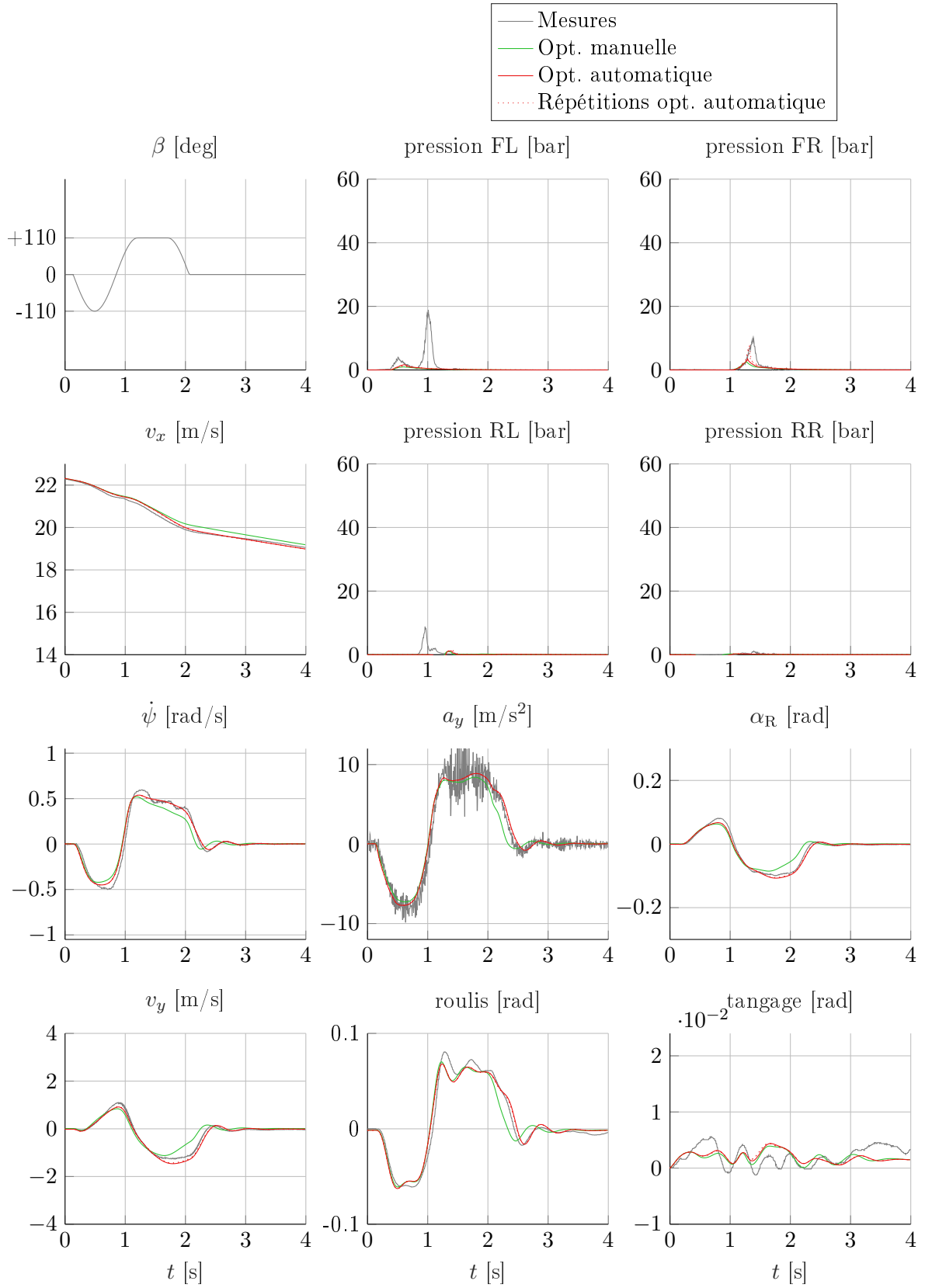


FIGURE 4.27 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -110° d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

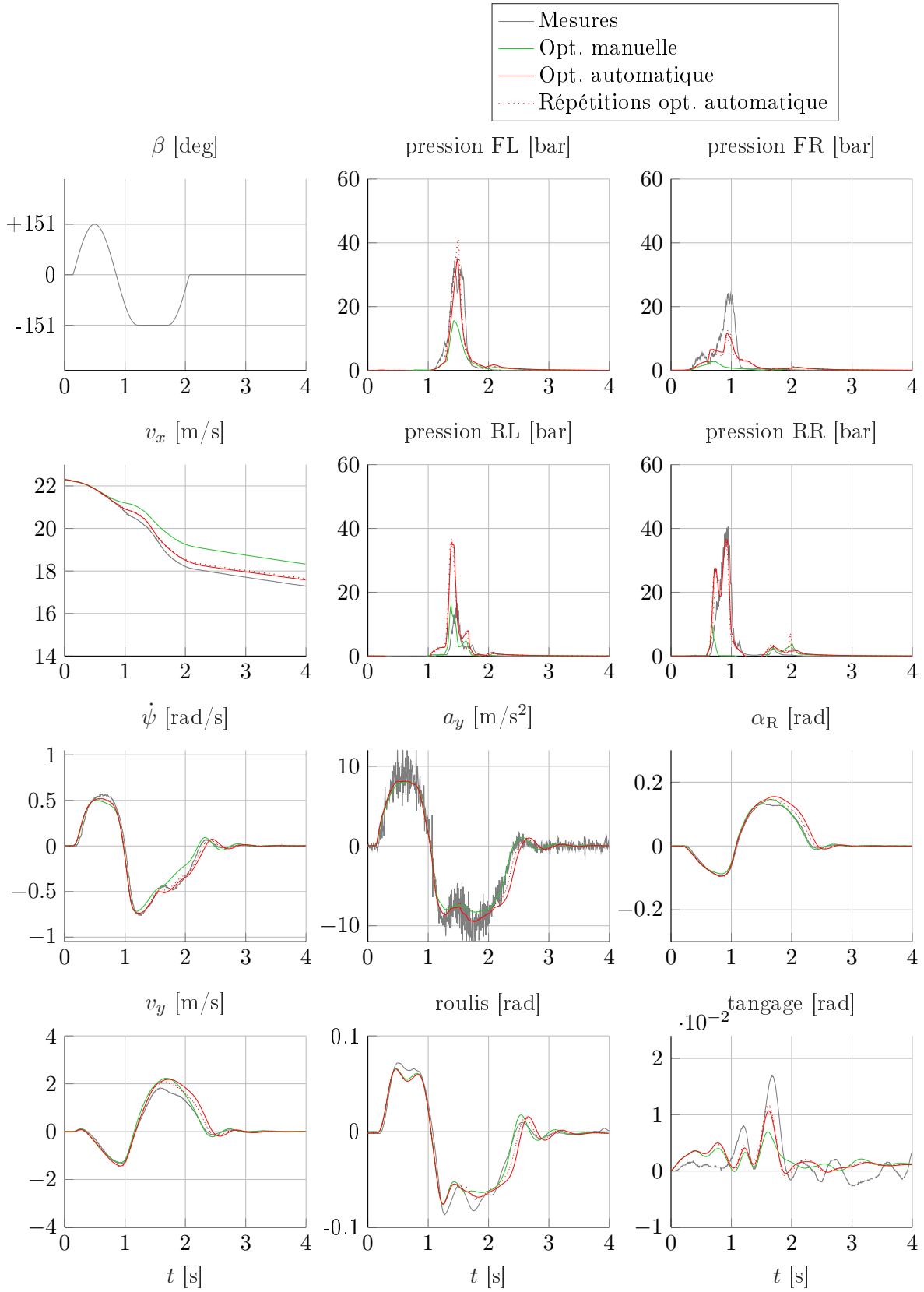


FIGURE 4.28 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +151 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

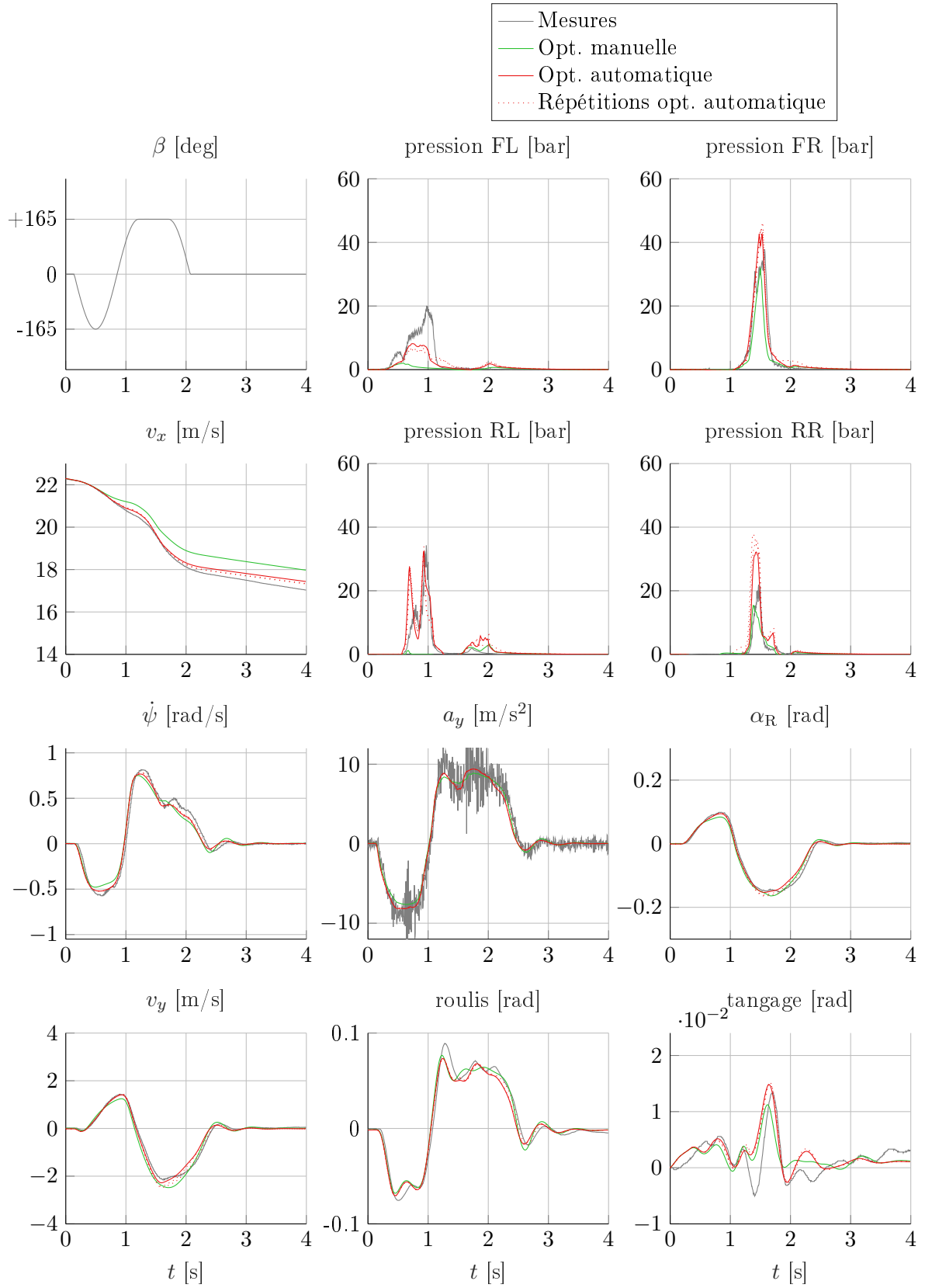


FIGURE 4.29 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -165° d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

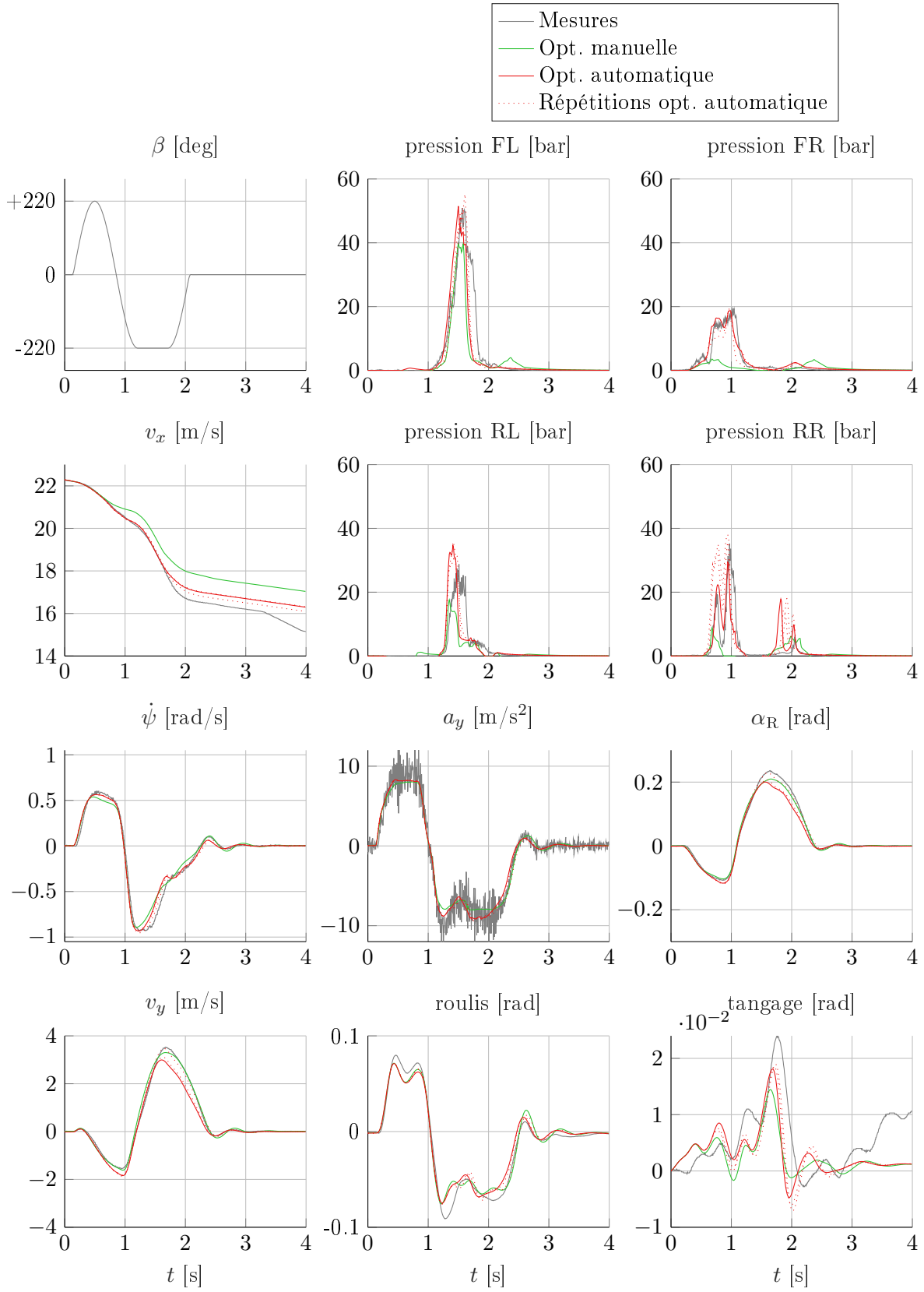


FIGURE 4.30 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +220 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

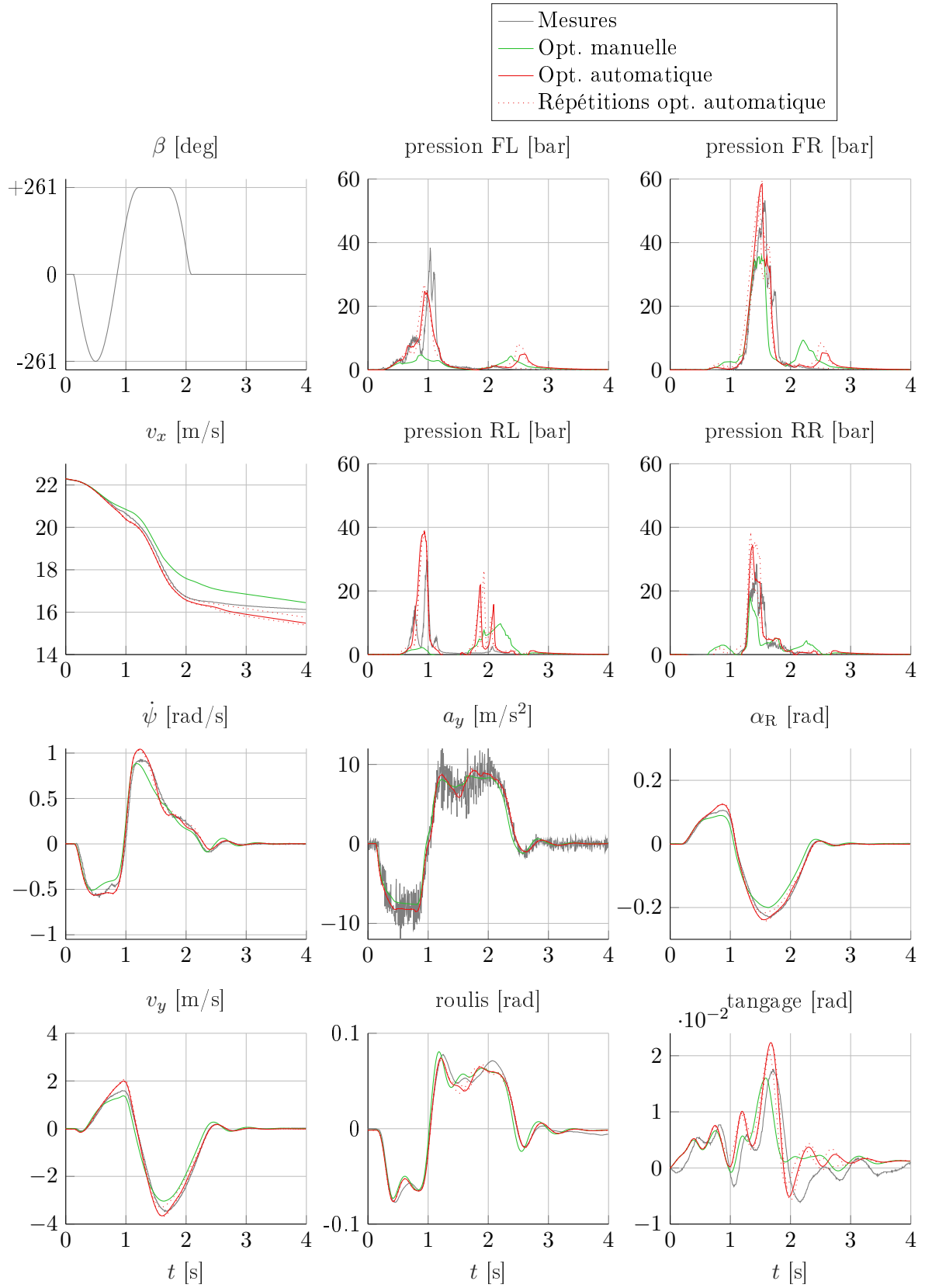


FIGURE 4.31 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à -261° d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

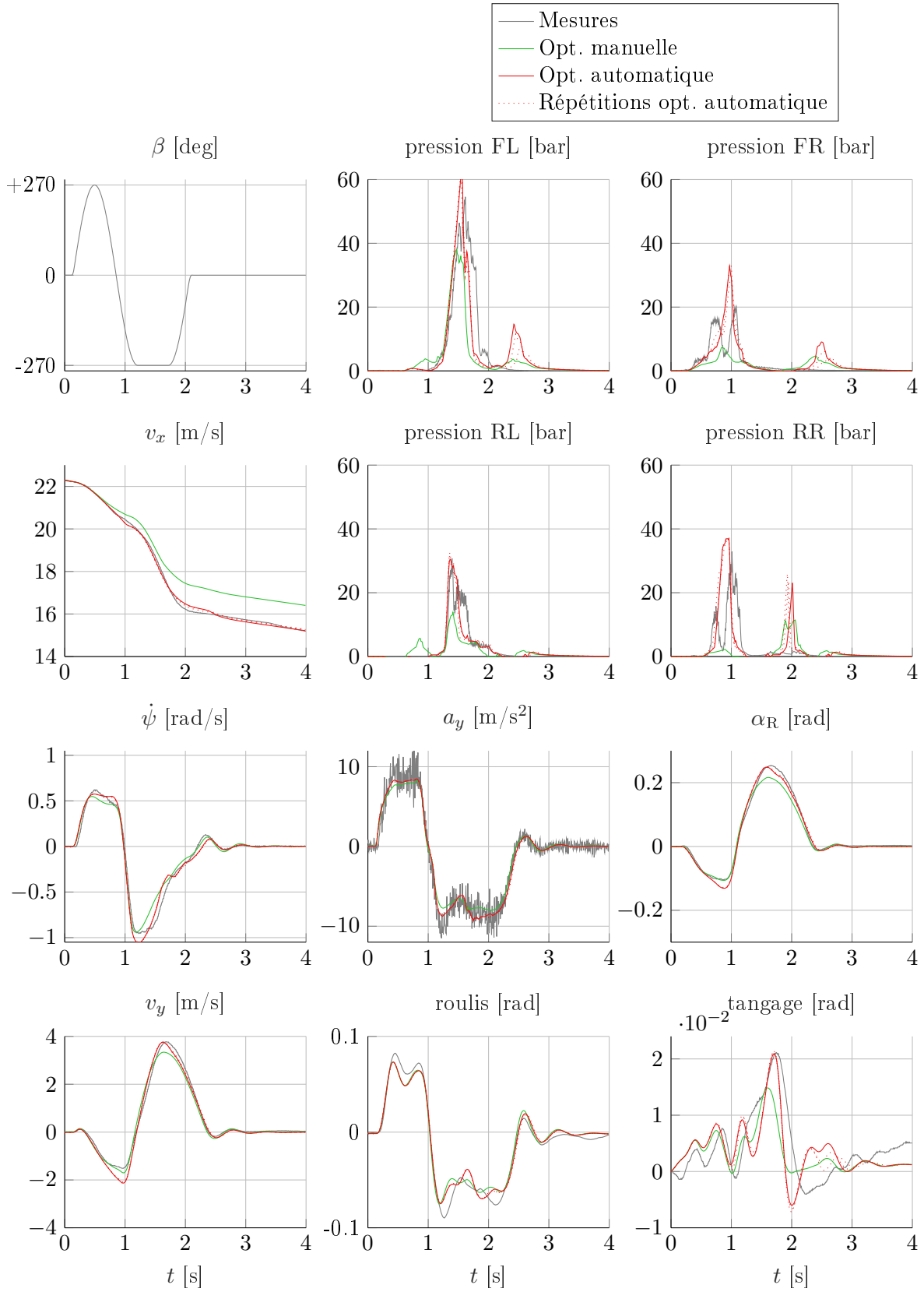


FIGURE 4.32 – Validation sur la manœuvre de sinus dwell à +270 degrés d'angle volant au premier pic, sur banc HIL.

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés au recalage des paramètres de modèles non-linéaires de pneu dans des modèles de dynamique du véhicule à partir de mesures embarquées. L'objectif final est de développer des outils d'estimation qui puissent être utilisés dans l'industrie automobile, afin de recaler des modèles utilisés pour la validation des fonctions du système de contrôle de stabilité ESC sur banc *Hardware-In-the-Loop* (HIL).

Du point de vue académique, nous avons étudié et comparé différentes méthodes d'estimation de paramètres. Nous nous sommes, en particulier, intéressés aux cas où le modèle est mal spécifié (entrées négligées, dynamiques négligées ou incorrectement modélisées) et que les mesures disponibles excitent inégalement les différents points de fonctionnement pour lesquels on souhaite que le modèle soit performant. Dans le cas statique, la littérature montre que ces deux hypothèses mènent à une pondération des échantillons dans le problème d'optimisation. Nous proposons de considérer également une pondération dans le cas de modèles dynamiques, et proposons une méthode empirique pour calculer ces coefficients de pondération. La pondération modifie le compromis réalisé par l'estimateur et permet de mieux approximer les dynamiques peu présentes dans les mesures, en approximant un peu moins bien les points de fonctionnement sur-représentés. Par ailleurs, une méthode d'identifiabilité a été implémentée, combinant plusieurs méthodes de la littérature, afin de sélectionner un ensemble restreint de paramètres à identifier.

Du point de vue de l'industrie automobile, une nouvelle méthodologie est proposée pour le recalage des paramètres de modèles détaillés de dynamique du véhicule. Nous nous sommes tout d'abord affranchis des contraintes liées aux bancs HIL. Pour cela, les pressions aux freins mesurées lors des essais sont utilisées comme des entrées du modèle. Après avoir sélectionné un ensemble restreint des paramètres du modèle de pneu les plus influents et identifiables, ceux-ci sont ajustés avec la méthode de l'erreur de simulation sur des manœuvres de type « sinus dwell » excitant très fortement le comportement latéral du véhicule. Les résultats obtenus avec cette approche sont ensuite validés sur banc HIL en boucle avec un ESC. La méthode proposée est ici employée pour l'ajustement des paramètres du modèle de pneu mais peut être plus globalement utilisée pour ajuster les paramètres d'autres sous-systèmes du modèle de véhicule. Par ailleurs, la manœuvre de « régime permanent » (sans rétroaction de l'ESC) a également été utilisée afin d'étudier et d'ajuster le modèle dans sa partie linéaire.

La méthode automatisée de recalage donne des résultats satisfaisants et permet de grandement réduire le temps et le coût pour obtenir un modèle suffisamment représentatif, ce qui représente un progrès notable pour le développement des futurs projets de véhicules. De plus, des méthodes ont été élaborées et implémentées qui pourront permettre de développer plus loin les outils numériques pour l'étude de la dynamique du véhicule.

Perspectives

Sur la méthode de pondération proposée :

- Une pondération avec une justification théorique pourrait être recherchée, celle utilisée étant empirique.
- Lors de l'utilisation avec l'algorithme EM, la représentativité du modèle s'améliore au cours des itérations ; il serait donc pertinent que les matrices de covariance évoluent au cours des itérations pour modéliser ce changement. Des techniques d'estimation de ces matrices pourraient améliorer l'algorithme d'estimation.
- Cette méthode de pondération pourrait être étendue à la méthode des tirs multiples pour pondérer différemment les erreurs sur chaque intervalle. Cela nécessiterait toutefois de comparer différentes trajectoires et non plus différents points de fonctionnement. Ceci peut alors s'étendre également au cas de l'erreur de simulation en considérant différentes manœuvres : si plusieurs manœuvres sont semblables et une autre est très différente, elles pourraient être pondérées en conséquence.

Sur la méthode implémentée dans le cadre des tests HIL en industrie :

- l'utilisation d'autres manœuvres excitant plus le comportement longitudinal du véhicule permettrait une meilleure estimation des paramètres pour la partie longitudinale du modèle de pneumatique.
- La mesure des vitesses de rotation des roues et leur prise en compte dans l'optimisation permettrait certainement une meilleure estimation des paramètres du comportement longitudinal du pneu. Par ailleurs, une telle mesure permettrait peut-être d'envisager l'utilisation de l'algorithme EM, et donc également de la pondération proposée dans cette thèse.
- La méthode d'identifiabilité avec son analyse de sensibilité peut être utilisée pour cartographier l'influence des paramètres dans diverses manœuvres.
- La méthodologie pourrait être améliorée en identifiant itérativement des sous-ensembles de paramètres sur différentes manœuvres les mettant particulièrement en évidence (par exemple, les paramètres pour le comportement longitudinal, puis pour le latéral, puis le couplage).

Bibliographie

- [ABJB19] Anton Albinsson, Fredrik Bruzelius, Bengt Jacobson, and Egbert Bakker. Evaluation of vehicle-based tyre testing methods. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, 233(1) :4–17, 2019.
- [AH11] Ienkaran Arasaratnam and Simon Haykin. Cubature Kalman smoothers. *Automatica*, 47(10) :2245–2250, 2011.
- [Aka98] Hirotogu Akaike. *Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*, pages 199–213. Springer New York, 1998.
- [AKB18] M. Acosta, S. Kanarachos, and M. Blundell. Virtual tyre force sensors : an overview of tyre model-based and tyre model-less state estimation techniques. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, 232(14) :1883–1930, 2018.
- [Ala15] Laura Alarcon. *Contribution à la modélisation expérimentale du comportement transitoire des pneumatiques*. PhD thesis, UHA, 2015.
- [Alb15] Marie Albisser. *Identification of aerodynamic coefficients from free flight data*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2015. Thèse de doctorat dirigée par Garnier, HuguesBernier, ClaudeDobre, Simona et Thomassin, Magalie Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique Université de Lorraine 2015.
- [Ant05] Anathasios C. Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*. Advances in Design and Control, SIAM, 2005.
- [Aud14] Charles Audet. A survey on direct search methods for blackbox optimization and their applications. *Mathematics without boundaries*, pages 31–56, 2014.
- [AÜKÇ08] K. B. Arıkan, Yavuz Samim Ünlüsoy, I. Korkmaz, and A. O. Çelebi. Identification of linear handling models for road vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 46(7) :621–645, 2008.
- [BA03] K. P. Burnham and D. R. Anderson. *Model selection and multimodel inference : a practical information-theoretic approach*. Springer New York, 2003.
- [Bad09] Boualem Badji. *Caractérisation du comportement non linéaire en dynamique du véhicule*. PhD thesis, Université de Technologie de Belfort-Montbeliard, 2009.
- [Bar74] Yonathan Bard. *Nonlinear parameter estimation*. Academic Press, 1974.
- [BB16] Matt C. Best and Karol Bogdanski. Full vehicle and tyre identification using unscented and extended identifying Kalman filters. *Proceedings of the 13th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC’ 16), Munich, Germany, 13–16 September 2016*, 2016.

-
- [BB18] Karol Bogdanski and Matthew C. Best. Kalman and particle filtering methods for full vehicle and tyre identification. *Vehicle System Dynamics*, 56(5) :769–790, 2018.
 - [Ben79] M. Benson. Parameter fitting in dynamic models. *Ecological Modelling*, 6(2) :97 – 115, 1979.
 - [BG15] Prithwish Bhaumik and Subhashis Ghosal. Bayesian two-step estimation in differential equation models. *Electron. J. Statist.*, 9(2) :3124–3154, 2015.
 - [BH04] M. Blundell and D. Harty. *Multibody systems approach to vehicle dynamics*. Automotive engineering series. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
 - [BNP87] Egbert Bakker, Lars Nyborg, and Hans B. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *SAE Transactions*, pages 190–204, 1987.
 - [Boy17] Michael Boyle. The integration of angular velocity. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(3) :2345–2374, May 2017.
 - [Br70] R. Bellman and K. J. Åström. On structural identifiability. *Mathematical Biosciences*, 7(3) :329–339, 1970.
 - [BRK01] Roland Brun, Peter Reichert, and Hans R. Künsch. Practical identifiability analysis of large environmental simulation models. *Water Resources Research*, 37(4) :1015–1030, 2001.
 - [Bro06] J. P. Brossard. *Dynamique du véhicule : modélisation des systèmes complexes*. Collection des sciences appliquées de l’INSA de Lyon. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
 - [Bru08] Nicolas J.-B. Brunel. Parameter estimation of ODE’s via nonparametric estimators. *Electron. J. Statist.*, 2 :1242–1267, 2008.
 - [BSP10] I. J. M. Besselink, A. J. C. Schmeitz, and H. B. Pacejka. An improved Magic Formula/Swift tyre model that can handle inflation pressure changes. *Vehicle System Dynamics*, 48(S1) :337–352, 2010.
 - [Con10] Dario Lo Conte. Tyre parameter identification from road tests on a complete vehicle. Master’s thesis, TU Delft - CRF, 2010.
 - [CT12] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, 2012.
 - [Cul94] Jean-Christophe Culioli. *Introduction à l’optimisation*. Ellipses, 1994.
 - [CV08] Ana Luisa Custodio and Luis N. Vicente. Sid-psm : A pattern search method guided by simplex derivatives for use in derivative-free optimization. *Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra*, 2008.
 - [DFS69] Howard Dugoff, Paul S. Fancher, and Leonard Segel. Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs. Technical report, Highway safety research institute, Michigan, 1969.
 - [Dix87] J. C. Dixon. The roll-centre concept in vehicle handling dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Transport Engineering*, 201(1) :69–78, 1987.
 - [DLR77] Arthur P. Dempster, Nan M. Laird, and Donald B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 39(1) :1–22, 1977.

-
- [DN97] G. De Nicolao. System identification : problems and perspectives. In *12th Workshop on Qualitative Reasoning*, volume 3, pages 1–2, 1997.
 - [DWO_rL95] C. Canudas De Wit, Hans Olsson, Karl Johan Åström, and Pablo Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control*, 40(3) :419–425, 1995.
 - [ECE15] ECE13H. Prescriptions uniformes relatives à l’homologation des voitures particulières en ce qui concerne le freinage. Technical report, Commission Économique pour l’Europe des Nations Unies, 2015.
 - [EFMDKL06] S. Estrada-Flores, I. Merts, B. De Ketelaere, and J. Lammertyn. Development and validation of grey-box models for refrigeration applications : a review of key concepts. *Int. J.*, 29(6) :931–946, Sep 2006.
 - [FBP19] Iztok Fajfar, Árpád Bűrmen, and Janez Puhan. The Nelder-Mead simplex algorithm with perturbed centroid for high-dimensional function optimization. *Optimization Letters*, 13(5) :1011–1025, 2019.
 - [FL99] Urban Forssell and Lennart Ljung. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35(7) :1215–1241, 1999.
 - [FMF12] Pierre Fevrier, Hervé Martin, and Gérard Fandard. Method for simulating the thermomechanical behavior of a tire rolling on the ground, October 16 2012. US Patent 8,290,756.
 - [GBCB16] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. *Deep learning*. MIT press Cambridge, 2016.
 - [GCC⁺18] Hongyan Guo, Dongpu Cao, Hong Chen, Chen Lv, Huaji Wang, and Siqi Yang. Vehicle dynamic state estimation : state of the art schemes and perspectives. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 5(2) :418–431, 2018.
 - [Ger99] M. B. Gerrard. Roll centres and jacking forces in independent suspensions-a first principles explanation and a designer’s toolkit. Technical report, SAE Technical Paper, 1999.
 - [GH12] Fuchang Gao and Lixing Han. Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters. *Computational Optimization and Applications*, 51(1) :259–277, 2012.
 - [GN05] Stuart Gibson and Brett Ninness. Robust maximum-likelihood estimation of multivariable dynamic systems. *Automatica*, 41(10) :1667–1682, 2005.
 - [Hal95] T. Halconrui. *Les liaisons au sol*. ETAI, 1995.
 - [Han16] Nikolaus Hansen. The cma evolution strategy : A tutorial. *arXiv preprint arXiv :1604.00772*, 2016.
 - [HN99] Waltraud Huyer and Arnold Neumaier. Global optimization by multilevel coordinate search. *Journal of Global Optimization*, 14(4) :331–355, 1999.
 - [Hor01] Werner Horbelt. *Maximum likelihood estimation in dynamical systems*. PhD thesis, Universität Freiburg im Breisgau, 2001.
 - [IPG17] IPG Automotive. *CarMaker reference manual version 6.0.4*, 2017.
 - [ISO91] ISO8855. Road vehicles — Vehicle dynamics and road-holding ability — Vocabulary. Standard 8855, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 1991.

-
- [ISO12] ISO4138. Passenger cars — Steady-state circular driving behaviour — Open-loop test methods. Technical Report 4138, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 2012.
 - [Jaz17] Reza N. Jazar. *Vehicle dynamics : theory and application*. Springer, 2017.
 - [JO16] Axel Jonson and Eric Olsson. A methodology for identification of Magic Formula tire model parameters from in-vehicle measurements. Master’s thesis, Master’s Thesis, Department of Applied Mechanics, Gothenburg, Sweden, 2016.
 - [JQ18] Jenny E. Jeong and Peng Qiu. Quantifying the relative importance of experimental data points in parameter estimation. *BMC systems biology*, 12(6) :103, 2018.
 - [JU04] Simon J. Julier and Jeffrey K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401–422, 2004.
 - [KB61] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *TRANS. ASME, SER. D, J. BASIC ENG*, page 109, 1961.
 - [KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *Ann. Math. Statist.*, 22(1) :79–86, 03 1951.
 - [KSS14] Juho Kokkala, Arno Solin, and Simo Särkkä. Expectation maximization based parameter estimation by sigma-point and particle smoothing. In *17th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, 2014.
 - [Lam10] Christophe Lamy. *Novel accurate tyre slip angle measurement means : application to tyre model identification from vehicle-on-track tests for global vehicle performance analysis*. PhD thesis, Université de Haute-Alsace, 2010.
 - [LÅN11] Kristoffer Lundahl, Jan Åslund, and Lars Nielsen. Investigating vehicle model detail for close to limit maneuvers aiming at optimal control. In *22nd International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*, 2011.
 - [Lju99] L. Ljung. *System identification : theory for the user*. Prentice Hall information and system sciences series. Prentice Hall PTR, 1999.
 - [Lju10] Lennart Ljung. Approaches to identification of nonlinear systems. *Linköping University Electronic Press*, 2010.
 - [LL94] P. Lindskog and L. Ljung. Tools for Semi-Physical Modeling. *IFAC Proceedings Volumes*, 27(8) :1199–1204, Jul 1994.
 - [LMSN04] E. K. Liebemann, K. Meder, J. Schuh, and G. Nenninger. Safety and performance enhancement : The Bosch electronic stability control (ESP). Technical report, SAE Technical Paper, 2004.
 - [LRWW98] Jeffrey C. Lagarias, James A. Reeds, Margaret H. Wright, and Paul E. Wright. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1) :112–147, 1998.
 - [MA04] R. Timothy Marler and Jasbir S. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, 26(6) :369–395, 2004.
 - [Mai12] Lionel Maiffredy. Bases de la dynamique du véhicule. Techniques de l’Ingénieur, 2012.
 - [mat7a] Matlab optimization toolbox, R2017a. The Mathworks, Natick, MA, USA.

-
- [Meh20] V. K. Mehta. Improved Nelder–Mead algorithm in high dimensions with adaptive parameters based on Chebyshev spacing points. *Engineering Optimization*, 52(10) :1814–1828, 2020.
 - [Mic01] Michelin. *The tyre : grip*. Société de technologie Michelin, 2001.
 - [MXPW11] Hongyu Miao, Xiaohua Xia, Alan S. Perelson, and Hulin Wu. On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics. *SIAM Review*, 53(1) :3–39, 2011.
 - [Nel01] O. Nelles. *Nonlinear system identification : from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Engineering online library. Springer, 2001.
 - [NW06] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
 - [OO13] Mette S. Olufsen and Johnny T. Ottesen. A practical approach to parameter estimation applied to model predicting heart rate regulation. *Journal of mathematical biology*, 67(1) :39–68, 2013.
 - [Pac06] H. Pacejka. *Tyre and vehicle dynamics*. Elsevier, 2006.
 - [PB92] Hans B. Pacejka and Egbert Bakker. The magic formula tyre model. *Vehicle system dynamics*, 21(S1) :1–18, 1992.
 - [PB97] H. B. Pacejka and I. J. M. Besselink. Magic formula tyre model with transient properties. *Vehicle system dynamics*, 27(S1) :234–249, 1997.
 - [PM12] A. Porcel and O. Macchi. First type approval of electronic stability control in passenger cars by means of vehicle dynamics simulation in accordance with ECE 13-H – challenges, innovation and benefits. In *Apply & Innovate 2012*, 2012.
 - [Por17] Catherine Porte. Méthodes à une variable et simplex. *Techniques de l'ingénieur Qualité au laboratoire*, base documentaire : TIB497DUO.(ref. article : p228), 2017. fre.
 - [PT18] Catherine Porte and Phahath Thammavong. Méthodes dérivées de la méthode simplex. *Techniques de l'ingénieur Qualité au laboratoire*, base documentaire : TIB497DUO.(ref. article : p229), 2018. fre.
 - [PVM⁺06] A. A. Poyton, M. S. Varziri, K. B. McAuley, P. J. McLellan, and J. O. Ramsay. Parameter estimation in continuous-time dynamic models using principal differential analysis. *Computers & Chemical Engineering*, 30(4) :698 – 708, 2006.
 - [PW97] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to mathematical systems theory : a behavioral approach*. Springer, 1997.
 - [Raj11] R. Rajamani. *Vehicle dynamics and control*. Mechanical Engineering Series. Springer US, 2011.
 - [rE71] K. J. Åström and P. Eykhoff. System identification - a survey. *Automatica*, 7(2) :123–162, 1971.
 - [RG18] Peter Riegl and Andreas Gaull. Modeling and validation of a complex vehicle dynamics model for real-time applications. In *Proceedings of 8th International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications*, SIMULTECH 2018, page 403–413, Setubal, PRT, 2018. SCITEPRESS - Science and Technology Publications, Lda.

- [RS13] Luis Miguel Rios and Nikolaos V. Sahinidis. Derivative-free optimization : a review of algorithms and comparison of software implementations. *Journal of Global Optimization*, 56(3) :1247–1293, 2013.
- [RTS65] Herbert E. Rauch, F. Tung, and Charlotte T. Striebel. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. *AIAA journal*, 3(8) :1445–1450, 1965.
- [Rug93] William J. Rugh. *Linear system theory*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice Hall, 1993.
- [Sär08] Simo Särkkä. unscented Rauch–Tung–Striebel smoother. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3) :845–849, 2008.
- [Sch99] Claude Schmitt. *Contribution à l'identification des paramètres physiques des systèmes complexes*. PhD thesis, Université de Haute-Alsace, 1999.
- [Sch09] Thomas B. Schön. An explanation of the expectation maximization algorithm. Technical Report 2915, Linköping University, Automatic Control, 2009.
- [Seg57] Leonard Segel. Research in the fundamentals of automobile control and stability. *SAE Trans.*, 65 :527–540, 1957.
- [SG07] Taehyun Shim and Chinar Ghike. Understanding the limitations of different vehicle models for roll dynamics studies. *Vehicle system dynamics*, 45(3) :191–216, 2007.
- [Sha48] Claude E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3) :379–423, 1948.
- [SHB14] D. Schramm, M. Hiller, and R. Bardini. *Vehicle dynamics : modeling and simulation*. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [Shi00] Hidetoshi Shimodaira. Improving predictive inference under covariate shift by weighting the log-likelihood function. *Journal of statistical planning and inference*, 90(2) :227–244, 2000.
- [SJ08] Björn Sohlberg and Elling W. Jacobsen. Grey box modelling, branches and experiences. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :11415–11420, 2008.
- [SP07] Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite. *Multivariable feedback control : analysis and design*. Jon Wiley & Sons, 2007.
- [Sti07] Stephen M. Stigler. The epic story of maximum likelihood. *Statistical Science*, 22(4), Nov 2007.
- [SWN11] Thomas B. Schön, Adrian Wills, and Brett Ninness. System identification of nonlinear state-space models. *Automatica*, 47(1) :39–49, 2011.
- [Sä13] Simo Särkkä. *Bayesian filtering and smoothing*. Cambridge University Press, 2013.
- [TDH92] Yutaka Tomita, Ad A. H. Damen, and Paul M. J. Van Den Hof. Equation error versus output error methods. *Ergonomics*, 35(5-6) :551–564, 1992.
- [Tho05] Magalie Thomassin. *Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives : application à l'identification de bief de rivière*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2005.
- [TSM⁺16] A. Tasora, R. Serban, H. Mazhar, A. Pazouki, D. Melanz, J. Fleischmann, M. Taylor, H. Sugiyama, and D. Negrut. Chrono : An open source multi-physics dynamics engine. pages 19–49. Springer, 2016.

-
- [Var82] J. Varah. A spline least squares method for numerical parameter estimation in differential equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(1) :28–46, 1982.
 - [VDMW01] Rudolph Van Der Merwe and Eric A. Wan. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation. In *International conference on acoustics, speech, and signal processing*, volume 6, pages 3461–3464. IEEE, 2001.
 - [VGR89] Sandor Vajda, Keith R. Godfrey, and Herschel Rabitz. Similarity transformation approach to identifiability analysis of nonlinear compartmental models. *Mathematical biosciences*, 93(2) :217–248, 1989.
 - [VTK04] Henning U. Voss, Jens Timmer, and Jürgen Kurths. Nonlinear dynamical system identification from uncertain and indirect measurements. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(06) :1905–1933, 2004.
 - [Was04] Larry Wasserman. *All of statistics : a concise course in statistics*. Springer texts in statistics, 2004.
 - [Wes19] Simon Wessing. Proper initialization is crucial for the nelder–mead simplex search. *Optimization Letters*, 13(4) :847–856, 2019.
 - [Whi82] Halbert White. Maximum likelihood estimation of misspecified models. *Econometrica*, 50(1) :1–25, 1982.
 - [WP97] Eric Walter and Luc Pronzato. *Identification of parametric models from experimental data*. Springer Verlag, 1997.
 - [WVDM00] Eric A. Wan and Rudolph Van Der Merwe. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pages 153–158. IEEE, 2000.
 - [WVDMN00] Eric A. Wan, Rudolph Van Der Merwe, and Alex T. Nelson. Dual estimation and the unscented transformation. In *Advances in neural information processing systems*, pages 666–672, 2000.
 - [WWS90] J. Wittenburg, U. Wolz, and A. Schmidt. Mesa verde—a general-purpose program package for symbolical dynamics simulations of multibody systems. In *Multibody Systems Handbook*, pages 341–360. Springer, 1990.
 - [Yan11] Xin-She Yang. Metaheuristic optimization. *Scholarpedia*, 6(8) :11472, 2011.

A

Modèle de pneumatique MF5.2

Sommaire

A.1	Introduction	151
A.2	Effort vertical et rayon de roulement effectif	151
A.3	Glissement et dérive	153
A.4	Effort longitudinal pur	153
A.5	Effort latéral pur	154
A.6	Moment d'auto-alignement pur	156
A.6.1	Moment d'auto-alignement : moment de chasse pneumatique	156
A.6.2	Moment d'auto-alignement : moment résiduel	157
A.7	Effort longitudinal couplé	158
A.8	Effort latéral couplé	159
A.9	Moment d'auto-alignement couplé	160
A.9.1	Moment de chasse du pneumatique	160
A.9.2	Moment résiduel	160
A.9.3	Moment dû à l'effort longitudinal	161
A.10	Moment de renversement	161
A.11	Moment de roulement	161
A.12	Transitoire	161

A.1 Introduction

Le modèle MF5.2 est décrit en détails dans [Pac06]. Ce modèle prend comme entrées l'angle de dérive α , le glissement κ , la charge F_z , l'angle d'inclinaison γ , la vitesse longitudinale au centre de la roue V_x et calcule en sortie les efforts F_x , F_y et les moments M_x , M_y , M_z au point de contact avec le sol C (voir figure A.1).

A.2 Effort vertical et rayon de roulement effectif

$$F'_{z0} = \lambda_{Fz0} F_{z0} \quad (\text{A.1})$$

F_{z0} : charge nominale

λ_{Fz0} : facteur d'échelle pour la charge verticale

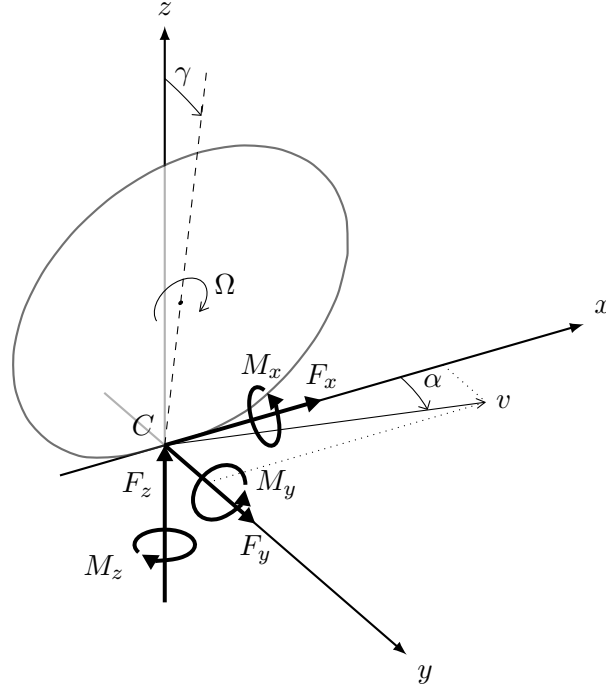
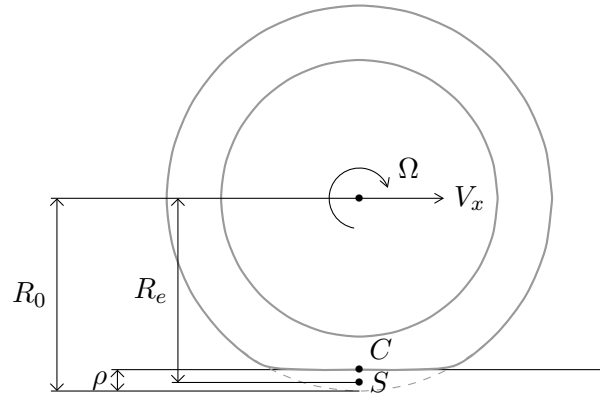


FIGURE A.1 – variables principales du modèles MF5.2.

Variation normalisée de l'effort vertical

$$df_z = \frac{F_z - F'_{z0}}{F'_{z0}} \quad (\text{A.2})$$

FIGURE A.2 – Rayon libre R_0 , Rayon effectif R_e , déformation due à la charge ρ et vitesse au centre roue V_x .

Rayon de roulement effectif

$$R_e = R_0 - \rho_{F_{z0}} (F_{reff} \rho_d + D_{reff} \arctan(B_{reff} \rho_d)) \quad (\text{A.3})$$

R_0 : rayon libre du pneumatique

B_{reff} : rigidité à faible charge

D_{reff} : valeur maximale du rayon effectif

F_{reff} : rigidité à forte charge

$$\rho_{F_{z0}} = \frac{F_{z0}}{C_z} \quad \rho_d = \frac{\rho}{\rho_{F_{z0}}} \quad \rho = \frac{F_z}{C_z} \quad (\text{A.4})$$

C_z : rigidité verticale du pneumatique

A.3 Glissement et dérive

glissement

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{V_x} = -\frac{V_x - \Omega R_e}{V_x} \quad (\text{A.5})$$

V_{sx} : vitesse longitudinale au point S , qui est à une distance R_e du centre roue vers le sol.

V_x : vitesse longitudinale centre de la roue.

dérive

$$\alpha = \arctan\left(\frac{V_{sy}}{V_x}\right) \quad (\text{A.6})$$

V_{sy} : vitesse latérale au point S , qui est à une distance R_e du centre roue vers le sol.

Si la modélisation des phénomènes transitoires du pneumatique est prise en compte, les variables intermédiaires κ' et α' sont utilisées (Section A.12).

A.4 Effort longitudinal pur

$$F_{x0} = D_x \sin [C_x \arctan \{B_x \kappa_x - E_x (B_x \kappa_x - \arctan B_x \kappa_x)\}] + S_{V_x} \quad (\text{A.7})$$

$$\kappa_x = \kappa + S_{H_x} \quad (\text{A.8})$$

Angle d'inclinaison pour l'effort longitudinal :

$$\gamma_x = \gamma \lambda_{\gamma x} \quad (\text{A.9})$$

$\lambda_{\gamma x}$: facteur d'échelle de l'angle d'inclinaison pour F_x

Coefficient de forme

$$C_x = p_{Cx1} \lambda_{C_x} \quad (\text{A.10})$$

p_{Cx1} : facteur de forme pour l'effort longitudinal

λ_{C_x} : facteur d'échelle de C_x

Coefficient d'amplitude

$$D_x = \mu_x F_z \quad (\text{A.11})$$

μ_x : coefficient de frottement

F_z : charge

$$\mu_x = (p_{Dx1} + p_{Dx2} df_z)(1 - p_{Dx3} \gamma_x^2) \lambda_{\mu x} \quad (> 0) \quad (\text{A.12})$$

p_{Dx1} : coefficient d'adhérence μ_x à charge nominale

p_{Dx2} : variation de μ_x avec la charge

p_{Dx3} : variation de μ_x avec l'angle d'inclinaison

$\lambda_{\mu x}$: facteur d'échelle pour le maximum du coefficient d'adhérence μ_x

Coefficient de rigidité

$$B_x = \frac{K_{x\kappa}}{(C_x D_x) + \epsilon_x} \quad (\text{A.13})$$

ϵ_x : petit nombre

$$\begin{aligned} K_{x\kappa} &= F_z(p_{Kx1} + p_{Kx2}df_z) \exp(p_{Kx3}df_z) \lambda_{Kx\kappa} \\ &= B_x C_x D_x = \frac{\partial F_{xo}}{\partial \kappa_x} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

p_{Kx1} : rigidité de glissement à charge nominale

p_{Kx2} : variation de la rigidité de glissement avec la charge

p_{Kx3} : variation exponentielle de la rigidité de glissement avec la charge

$\lambda_{Kx\kappa}$: facteur d'échelle de la rigidité de glissement

Coefficient de courbure

$$E_x = (p_{Ex1} + p_{Ex2}df_z + p_{Ex3}df_z^2)(1 - p_{Ex4} \operatorname{sgn}(\kappa_x)) \lambda_{Ex} \quad (\leq 1) \quad (\text{A.15})$$

p_{Ex1} : coefficient de courbure à charge nominale

p_{Ex2} : variation de la courbure avec la charge

p_{Ex3} : variation de la courbure avec le carré de la charge

p_{Ex4} : variation de la courbure avec le signe du glissement

λ_{Ex} : facteur d'échelle de la courbure

Décalage vertical

$$S_{Vx} = F_z(p_{Vx1} + p_{Vx2}df_z) \lambda_{Vx} \lambda_{\mu x} \quad (\text{A.16})$$

p_{Vx1} : décalage vertical S_{Vx}/F_z à charge nominale F_{znom}

p_{Vx2} : variation de décalage vertical S_{Vx}/F_z avec la charge

λ_{Vx} : facteur d'échelle de S_{Vx}

$\lambda_{\mu x}$: facteur d'échelle pour le maximum du coefficient d'adhérence μ_x

Décalage horizontal

$$S_{Hx} = (p_{Hx1} + p_{Hx2}df_z) \lambda_{Hx} \quad (\text{A.17})$$

p_{Hx1} : décalage horizontal à charge nominale F_{znom}

p_{Hx2} : variation de décalage horizontal avec la charge

λ_{Hx} : facteur d'échelle de S_{Hx}

A.5 Effort latéral pur

$$F_{y0} = D_y \sin [C_y \arctan \{B_y \alpha_y - E_y (B_y \alpha_y - \arctan B_y \alpha_y)\}] + S_{Vy} \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha_y = \alpha + S_{Hy} \quad (\text{A.19})$$

Angle d'inclinaison pour l'effort latéral :

$$\gamma_y = \gamma \lambda_{\gamma y} \quad (\text{A.20})$$

$\lambda_{\gamma y}$: facteur d'échelle de l'angle d'inclinaison pour F_y

Coefficient de forme

$$C_y = p_{Cy1} \lambda_{C_y} \quad (\text{A.21})$$

p_{Cy1} : facteur de forme pour l'effort latéral

λ_{C_y} : facteur d'échelle de C_y

Coefficient d'amplitude

$$D_y = \mu_y F_z \quad (\text{A.22})$$

μ_y : coefficient de frottement

F_z : charge

$$\mu_y = (p_{Dy1} + p_{Dy2} df_z)(1 - p_{Dy3} \gamma_y^2) \lambda_{\mu_y} \quad (> 0) \quad (\text{A.23})$$

p_{Dy1} : coefficient d'adhérence μ_y à charge nominale

p_{Dy2} : variation de μ_y avec la charge

p_{Dy3} : variation de μ_y avec le carré de l'angle d'inclinaison

λ_{μ_y} : facteur d'échelle pour le maximum du coefficient d'adhérence μ_y

Coefficient de rigidité

$$B_y = \frac{K_{y\alpha}}{(C_y D_y) + \epsilon_y} \quad (\text{A.24})$$

ϵ_y : petit nombre

$$\begin{aligned} K_{y\alpha} &= p_{Ky1} F'_{z0} \sin \left(2 \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ky2} F'_{z0}} \right\} \right) (1 - p_{Ky3} |\gamma_y|) \lambda_{Ky\alpha} \\ &= B_y C_y D_y = \frac{\partial F_{yo}}{\partial \kappa_y} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

p_{Ky1} : rigidité de dérive à charge nominale

p_{Ky2} : proportion de la charge nominale pour laquelle la rigidité de dérive est maximale

p_{Ky3} : variation de la rigidité de dérive avec l'angle d'inclinaison

$\lambda_{Kx\kappa}$: facteur d'échelle de la rigidité de glissement

Coefficient de courbure

$$E_y = (p_{Ey1} + p_{Ey2} df_z) \{1 - (p_{Ey3} + p_{Ey4} \gamma_y) \operatorname{sgn}(\alpha_y)\} \lambda_{Ey} \quad (\leq 1) \quad (\text{A.26})$$

p_{Ey1} : coefficient de courbure à charge nominale

p_{Ey2} : variation de la courbure avec la charge

p_{Ey3} : variation de la courbure avec le signe de la dérive

p_{Ey4} : variation de la courbure avec l'angle d'inclinaison

λ_{Ey} : facteur d'échelle de la courbure

Décalage vertical

$$S_{Vy} = F_z (p_{Vy1} + p_{Vy2} df_z) \lambda_{Vy} \lambda_{\mu_y} + S_{Vy\gamma} \quad (\text{A.27})$$

p_{Vy1} : décalage vertical S_{Vy}/F_z à charge nominale F_{znom}

p_{Vy2} : variation du décalage vertical S_{Vy}/F_z avec la charge

λ_{Vy} : facteur d'échelle de S_{Vy}

$\lambda_{\mu y}$: facteur d'échelle pour le maximum du coefficient d'adhérence μ_y

$$S_{Vy\gamma} = F_z(p_{Vy3} + p_{Vy4}df_z)\gamma_y\lambda_{Ky\gamma}\lambda_{\mu y} \quad (\text{A.28})$$

p_{Vy3} : variation du décalage vertical $S_{Vy\gamma}/F_z$ avec l'angle d'inclinaison.

p_{Vy4} : variation du décalage vertical $S_{Vy\gamma}/F_z$ avec l'angle d'inclinaison et la charge

$\lambda_{Ky\gamma}$: facteur d'échelle de l'angle d'inclinaison pour F_y

Décalage horizontal

$$S_{Hy} = (p_{Hy1} + p_{Hy2}df_z)\lambda_{Hy} + S_{Hy\gamma} \quad (\text{A.29})$$

p_{Hy1} : décalage horizontal à charge nominale F_{znom}

p_{Hy2} : variation de décalage horizontal avec la charge

λ_{Hx} : facteur d'échelle de S_{Hx}

$$S_{Hy\gamma} = p_{Hy3}\gamma_y \quad (\text{A.30})$$

p_{Hy3} : variation de décalage horizontal avec l'angle d'inclinaison

A.6 Moment d'auto-alignement pur

$$M_{z0} = M'_{z0} + M_{zr0} \quad (\text{A.31})$$

Angle d'inclinaison pour l'effort latéral :

$$\gamma_z = \gamma\lambda_{\gamma z} \quad (\text{A.32})$$

$\lambda_{\gamma y}$: facteur d'échelle de l'angle d'inclinaison pour F_y

Le moment d'auto-alignement est séparé en deux moments distincts. Le moment de chasse pneumatique M'_{z0} dû à la force latérale qui ne s'applique pas exactement au point de contact conventionnel roue-sol mais un peu en arrière d'une distance t , et le moment résiduel M_{zr0} (faible).

A.6.1 Moment d'auto-alignement : moment de chasse pneumatique

$$M'_{z0} = -t_0 F_{y0} \quad (\text{A.33})$$

$$t_0 = D_t \cos [C_t \arctan \{B_t \alpha_t - E_t (B_t \alpha_t - \arctan(B_t \alpha_t))\}] \cos \alpha \quad (\text{A.34})$$

$$\alpha_t = \alpha + S_{Ht} \quad (\text{A.35})$$

Coefficient de forme

$$C_t = q_{Cz1} \quad (\text{A.36})$$

q_{Cz1} : coefficient de forme pour M'_{z0}

Coefficient d'amplitude

$$D_{t0} = F_z \left(\frac{R_0}{F'_{z0}} \right) (q_{Dz1} + q_{Dz2} df_z) \lambda_t \quad (\text{A.37})$$

$$D_t = D_{t0} (1 + q_{Dz3} \gamma_z + q_{Dz4} \gamma_z^2) \quad (\text{A.38})$$

R_0 : rayon du pneumatique immobile sans charge

q_{Dz1} : maximum de la chasse pneumatique

q_{Dz2} : variation du maximum de la chasse pneumatique avec la charge

λ_t : facteur d'échelle du maximum de la chasse pneumatique

q_{Dz3} : variation du maximum de M'_{z0} avec l'angle d'inclinaison

q_{Dz4} : variation du maximum de M'_{z0} avec le carré de l'angle d'inclinaison

Coefficient de rigidité

$$B_t = (q_{Bz1} + q_{Bz2} df_z + q_{Bz3} df_z^2) (1 + q_{Bz4} \gamma_z + q_{Bz5} |\gamma_z|) \frac{\lambda_{Ky\alpha}}{\lambda_{\mu y}} \quad (\text{A.39})$$

q_{Bz1} : coefficient de pente de M'_{z0}

q_{Bz2} : variation du coefficient de pente de M'_{z0} avec la charge

q_{Bz3} : variation du coefficient de pente de M'_{z0} avec le carré de la charge

q_{Bz4} : variation du coefficient de pente de M'_{z0} avec l'angle d'inclinaison

q_{Bz5} : variation du coefficient de pente de M'_{z0} avec la valeur absolue de l'angle d'inclinaison

Coefficient de courbure

$$E_t = (q_{Ez1} + q_{Ez2} df_z + q_{Ez3} df_z^2) \left\{ 1 + (q_{Ez4} + q_{Ez5} \gamma_z) \frac{2}{\pi} \arctan(B_t C_t \alpha_t) \right\} \quad (\leq 1) \quad (\text{A.40})$$

Décalage horizontal

$$S_{Ht} = q_{Hz1} + q_{Hz2} df_z + (q_{Hz3} + q_{Hz4} df_z) \gamma_z \quad (\text{A.41})$$

q_{Hz1} : décalage horizontal de M'_{z0} à charge nominale

q_{Hz2} : variation du décalage horizontal avec la charge

q_{Hz3} : variation du décalage horizontal avec l'angle d'inclinaison

q_{Hz4} : variation du décalage horizontal avec la charge et l'angle d'inclinaison

A.6.2 Moment d'auto-alignement : moment résiduel

Le moment résiduel M_{zr0} est exprimé par une équation similaire à l'équation générale mais avec un cosinus au lieu du sinus et avec $E_r = 0$.

$$M_{zr0} = D_r \cos [C_r \arctan(B_r \alpha_r)] \cos(\alpha) \quad (\text{A.42})$$

Le moment résiduel atteint son maximum D_r lorsque l'effort latérale est nul (pour $\alpha_r = 0$).

$$\alpha_r = \alpha + S_{Hf} \quad (\text{A.43})$$

Coefficient de forme

$$C_r = 1 \quad (\text{A.44})$$

Coefficient d'amplitude

$$D_r = F_z R_0 \lambda_{\mu y} \{ (q_{Dz6} + q_{Dz7} df_z) \lambda_{Mr} + (q_{Dz8} + q_{Dz9} df_z) \gamma_z \} - 1 \quad (\text{A.45})$$

q_{Dz6} : maximum du moment résiduel $F_z R_0 q_{Dz6}$ à charge nominale

q_{Dz7} : variation du maximum de M_{zr0} avec la charge

λ_{Mr} : facteur d'échelle pour le maximum de M_{zr0}

q_{Dz8} : variation du maximum de M_{zr0} avec l'angle d'inclinaison

q_{Dz9} : variation du maximum de M_{zr0} avec la charge et l'angle d'inclinaison

Coefficient de rigidité

$$B_r = \left(q_{Bz9} \frac{\lambda_{Ky}}{\lambda_{\mu y}} + q_{Bz10} B_y C_y \right) \quad (\text{A.46})$$

q_{Bz9} : rigidité du moment résiduel

q_{Bz10} : contribution de $B_y C_y$ à la rigidité du moment résiduel

Décalage horizontal

$$S_{Hf} = S_{Hy} + \frac{S_{Vy}}{K'_{y\alpha}} \quad (\text{A.47})$$

$$K'_{y\alpha} = K_{y\alpha} + \epsilon_K \quad (\text{A.48})$$

ϵ_K : petit nombre

A.7 Effort longitudinal couplé

L'effort longitudinal couplé prend en compte l'influence de la dérive. Ainsi à dérive nulle, on retrouve l'effort longitudinal pur, et lorsque la dérive prend de l'importance on a $F_x < F_{x0}$.

$$F_x = G_{x\alpha} F_{x0} \quad (\text{A.49})$$

$$G_{x\alpha} = \frac{\cos [C_{x\alpha} \arctan \{ B_{x\alpha} \alpha_S - E_{x\alpha} (B_{x\alpha} \alpha_S - \arctan(B_{x\alpha} \alpha_S)) \}]}{G_{x\alpha 0}} \quad (> 0) \quad (\text{A.50})$$

$$G_{x\alpha 0} = \cos [C_{x\alpha} \arctan \{ B_{x\alpha} S_{Hx\alpha} - E_{x\alpha} (B_{x\alpha} S_{Hx\alpha} - \arctan(B_{x\alpha} S_{Hx\alpha})) \}] \quad (\text{A.51})$$

$$\alpha_S = \alpha + S_{Hx\alpha} \quad (\text{A.52})$$

Coefficient de forme

$$C_{x\alpha} = r_{Cx1} \quad (\text{A.53})$$

r_{Cx1} : coefficient de forme pour la réduction d'effort longitudinal

Coefficient de rigidité

$$B_{x\alpha} = r_{Bx1} \cos [\arctan(r_{Bx2} \kappa)] \lambda_{x\alpha} \quad (\text{A.54})$$

r_{Bx1} : pente pour la réduction d'effort longitudinal avec la dérive

r_{Bx2} : variation de la pente en fonction du glissement

$\lambda_{x\alpha}$: facteur d'échelle de l'influence de la dérive sur la pente de la réduction d'effort longitudinal

Coefficient de courbure

$$E_{x\alpha} = r_{Ex1} + r_{Ex2}df_z \quad (\text{A.55})$$

r_{Ex1} : coefficient de courbure pour la réduction d'effort longitudinal avec la dérive à charge nominale

r_{Ex2} : variation du coefficient de courbure avec la charge

Décalage horizontal

$$S_{Hx\alpha} = r_{Hx1} \quad (\text{A.56})$$

r_{Hx1} : décalage à l'origine pour la réduction d'effort longitudinal avec la dérive

A.8 Effort latéral couplé

L'effort latéral couplé prend en compte l'influence du glissement. Ainsi à glissement nul, on retrouve l'effort latéral pur, et lorsque le glissement prend de l'importance on a $F_y < F_{y0}$.

$$F_y = G_{y\kappa}F_{y0} + S_{Vy\kappa} \quad (\text{A.57})$$

$$G_{y\kappa} = \frac{\cos [C_{y\kappa} \arctan \{B_{y\kappa}\kappa_S - E_{y\kappa}(B_{y\kappa}\kappa_S - \arctan(B_{y\kappa}\kappa_S))\}]}{G_{y\kappa 0}} \quad (> 0) \quad (\text{A.58})$$

$$G_{y\kappa 0} = \cos [C_{y\kappa} \arctan \{B_{y\kappa}S_{Hy\kappa} - E_{y\kappa}(B_{y\kappa}S_{Hy\kappa} - \arctan(B_{y\kappa}S_{Hy\kappa}))\}] \quad (\text{A.59})$$

$$\kappa_S = \kappa + S_{Hy\kappa} \quad (\text{A.60})$$

Coefficient de forme

$$C_{y\kappa} = r_{Cy1} \quad (\text{A.61})$$

r_{Cy1} : coefficient de forme pour la réduction d'effort latéral

Coefficient de rigidité

$$B_{y\kappa} = r_{By1} \cos [\arctan \{r_{By2}(\alpha - r_{By3})\}] \lambda_{y\kappa} \quad (\text{A.62})$$

r_{By1} : pente pour la réduction d'effort latéral avec le glissement

r_{By2} : variation de la pente en fonction de la dérive

r_{By3} : décalage de la variation de la pente en fonction de la dérive

$\lambda_{y\kappa}$: facteur d'échelle de l'influence du glissement sur la pente de la réduction d'effort latéral

Coefficient de courbure

$$E_{y\kappa} = r_{Ey1} + r_{Ey2}df_z \quad (\text{A.63})$$

r_{Ey1} : coefficient de courbure pour la réduction d'effort latéral avec le glissement à charge nominale

r_{Ey2} : variation du coefficient de courbure avec la charge

Décalage vertical

$$S_{Vy\kappa} = D_{Vy\kappa} \sin [r_{Vy5} \arctan(r_{Vy6}\kappa)] \lambda_{Vy\kappa} \quad (\text{A.64})$$

$$D_{Vy\kappa} = \mu_y F_z (r_{Vy1} + r_{Vy2} df_z + r_{Vy3} \gamma) \cos(\arctan(r_{Vy4}\alpha)) \quad (\text{A.65})$$

r_{Vy1} : force latérale $\mu_y F_z r_{Vy1}$ induite par le glissement

r_{Vy2} : variation de la force latérale induite par le glissement avec la charge

r_{Vy3} : variation de la force latérale induite par le glissement avec l'angle d'inclinaison

r_{Vy4} : variation de la force latérale induite par le glissement avec la dérive

r_{Vy5} : variation de la force latérale induite par le glissement avec le glissement

r_{Vy6} : variation de la force latérale induite par le glissement avec $\arctan$ du glissement

Décalage horizontal

$$S_{Hy\kappa} = r_{Hy1} + r_{Hy2} df_z \quad (\text{A.66})$$

r_{Hy1} : décalage à l'origine pour la réduction d'effort latéral avec le glissement à charge nominale

r_{Hy2} : variation du décalage à l'origine avec la charge

A.9 Moment d'auto-alignement couplé

$$M_z = M'_z + M_{zr} + sF_x \quad (\text{A.67})$$

On identifie des angles de dérive équivalents $\alpha_{t,eq}, \alpha_{r,eq}$ qui prennent en compte le glissement

$$\alpha_{t,eq} = \arctan \sqrt{\tan^2 \alpha_t + \left(\frac{K_{x\kappa}}{K'_{y\alpha}} \right)^2 \kappa^2 \operatorname{sgn}(\alpha_t)} \quad (\text{A.68})$$

$$\alpha_{r,eq} = \arctan \sqrt{\tan^2 \alpha_r + \left(\frac{K_{x\kappa}}{K'_{y\alpha}} \right)^2 \kappa^2 \operatorname{sgn}(\alpha_r)} \quad (\text{A.69})$$

A.9.1 Moment de chasse du pneumatique

$$M'_z = -tF'_y \quad (\text{A.70})$$

$$F'_y = F_y - S_{Vy\kappa} \quad (\text{A.71})$$

$$t = D_t \cos [C_t \arctan \{B_t \alpha_{t,eq} - E_t (B_t \alpha_{t,eq} - \arctan(B_t \alpha_{t,eq}))\}] \cos \alpha \quad (\text{A.72})$$

A.9.2 Moment résiduel

$$M_{zr} = D_r \cos [C_r \arctan(B_r \alpha_{r,eq})] \cos(\alpha) \quad (\text{A.73})$$

A.9.3 Moment dû à l'effort longitudinal

$$s = R_0 \left\{ s_{sz1} + s_{sz2} \left(\frac{F_y}{F'_{z0}} \right) + (s_{sz3} + s_{sz4} df_z) \gamma \right\} \lambda_s \quad (\text{A.74})$$

s_{sz1} : distance $s_{sz1}R_0$ pour le bras de levier avec F_x

s_{sz2} : variation de la distance $s_{sz1}R_0$ avec l'effort latéral

s_{sz3} : variation de la distance $s_{sz1}R_0$ avec l'angle d'inclinaison

s_{sz4} : variation de la distance $s_{sz1}R_0$ avec l'angle d'inclinaison et la charge

λ_s : facteur d'échelle pour le bras de levier avec F_x

A.10 Moment de renversement

$$M_x = F_z R_0 \left(q_{sx1} \lambda_{VMx} + \left(-q_{sx2} \gamma + q_{sx3} \frac{F_y}{F'_{z0}} \right) \lambda_{Mx} \right) \quad (\text{A.75})$$

q_{sx1} : moment de renversement

λ_{VMx} : facteur d'échelle du moment de renversement

q_{sx2} : variation du moment de renversement avec l'angle d'inclinaison

q_{sx3} : variation du moment de renversement avec l'effort latéral

λ_{Mx} : facteur d'échelle pour la contribution de γ et F_y au moment de renversement

A.11 Moment de roulement

$$M_y = -F_z R_0 \left\{ q_{sy1} + q_{sy2} \frac{F_x}{F'_{z0}} + q_{sy3} \left| \frac{V_x}{V_{ref}} \right| + q_{sy4} \left(\frac{V_x}{V_{ref}} \right)^4 \right\} \lambda_{My} \quad (\text{A.76})$$

V_{ref} : vitesse longitudinale de référence ($\sqrt{gR_0}$ ou autre valeur spécifiée)

q_{sy1} : moment de roulement

q_{sy2} : variation du moment de roulement avec l'effort longitudinal

q_{sy3} : variation du moment de roulement avec la vitesse

q_{sy4} : variation du moment de roulement avec la vitesse à la puissance 4

λ_{My} : facteur d'échelle du moment de roulement

A.12 Transitoire

Pour modéliser le comportement transitoire du pneumatique on utilise dans les équations précédentes les variables intermédiaires κ' et α' calculées comme

$$\kappa' = \frac{u}{\sigma_\kappa} \text{sgn}(V_{Cx}) \quad (\text{A.77})$$

$$\alpha' = \arctan\left(\frac{v}{\sigma_\alpha}\right). \quad (\text{A.78})$$

Les quantités u et v sont obtenues par des équations différentielles d'ordre 1,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\sigma_\kappa} |V_{Cx}| u = -V_{Sx} \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\sigma_\alpha} |V_{Cx}| v = -V_{Sy} \quad (\text{A.80})$$

u et v représentent les déformations longitudinale et latérale du pneu, tandis que σ_κ et σ_α sont les longueurs de relaxation.

$$\sigma_\kappa = F_z (p_{Tx1} + p_{Tx2} df_z) \exp(-p_{Tx3} df_z) \frac{R_0}{F'_{z0}} \lambda_{\sigma\kappa} \quad (\text{A.81})$$

p_{Tx1} : longueur de relaxation

p_{Tx2} : variation de la longueur de relaxation avec la charge

p_{Tx3} : variation exponentielle de la longueur de relaxation avec la charge

$\lambda_{\sigma\kappa}$: facteur d'échelle pour la longueur de relaxation longitudinale

$$\sigma_\alpha = p_{Ty1} \sin \left[2 \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ty2} F'_{z0}} \right\} \right] (1 - p_{Ky3} |\gamma|) R_0 \lambda_{Fz0} \lambda_{\sigma\alpha} \quad (\text{A.82})$$

p_{Ty1} : longueur de relaxation latérale à charge nominale

p_{Ty2} : proportion de la charge nominale pour laquelle la relaxation latérale est maximale

p_{Ty3} : variation de la longueur de relaxation avec l'angle d'inclinaison

λ_{Fz0} : facteur d'échelle pour la charge nominale

$\lambda_{\sigma\alpha}$: facteur d'échelle pour la longueur de relaxation longitudinale.

B

Estimation d'état par lissage

Sommaire

B.1	Filtrage et lissage	163
B.2	Filtrage et lissage gaussiens	164
B.3	Lissage de Rauch-Tung-Striebel unscented	166
B.4	Lissage de Rauch-Tung-Striebel cubature	166

B.1 Filtrage et lissage

Afin d'utiliser l'inférence bayésienne pour développer les équations de filtrage et du lissage, la représentation d'état du modèle doit être mise sous forme probabiliste. De plus, pour simplifier l'écriture, l'entrée u est ici omise, le modèle est représenté par

$$x_{k+1} \sim p(x_{k+1}|x_k, \theta) \quad (\text{B.1})$$

$$y_k \sim p(y_k|x_k, \theta). \quad (\text{B.2})$$

Le filtrage consiste à calculer une estimation de la distribution de l'état à chaque instant k en utilisant les mesures jusqu'à l'instant k , $y_{1:k}$, tandis que le lissage consiste à calculer une estimation de la distribution de l'état à chaque instant k en utilisant toutes les mesures $y_{1:N}$. L'estimation d'état par lissage est obtenue en employant un algorithme récursif qui parcourt les données dans le sens croissant du temps (*forward pass*) puis dans le sens opposé (*backward pass*) [Sär08]. L'étape *forward pass* est le filtrage, le lissage effectue donc un filtrage plus une passe en sens contraire. La technique du filtrage est utilisée dans les applications temps réel (*online*) tandis que la technique du lissage permet une estimation plus fine pour travailler sur des données préalablement enregistrées.

Le filtrage procède à une étape de mise à jour pour calculer $p(x_k|y_{1:k})$ et une étape de prédiction pour calculer $p(x_{k+1}|y_{1:k})$. L'étape de mise à jour se calcule en utilisant le théorème de Bayes $p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$ en remplaçant A et B par x_k et y_k [Sä13, Chap. 4] :

$$p(x_k|y_{1:k}) = p(x_k|y_k, y_{1:k-1}) = \frac{p(y_k|x_k, y_{1:k-1})p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \quad (\text{B.3})$$

en utilisant les propriétés de Markov du modèle, la sortie à l'instant k ne dépend que de l'état à l'instant k , et en intégrant sur l'état au dénominateur,

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int p(y_k, x_k|y_{1:k-1})dx_k} \quad (\text{B.4})$$

en utilisant à nouveau le théorème de Bayes et les propriétés de Markov au dénominateur,

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})dx_k}. \quad (\text{B.5})$$

L'étape de prédiction se calcule en intégrant sur x_k , en utilisant le théorème de Bayes puis les propriétés de Markov pour obtenir l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int p(x_{k+1}, x_k|y_{1:k})dx_k \quad (\text{B.6})$$

$$= \int p(x_{k+1}|x_k, y_{1:k})p(x_k|y_{1:k})dx_k \quad (\text{B.7})$$

$$= \int p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k})dx_k. \quad (\text{B.8})$$

Le lissage utilise le résultat du filtrage $p(x_k|y_{1:k})$ et le résultat de l'étape de lissage à l'instant $k+1$, $p(x_{k+1}|y_{1:N})$, pour calculer $p(x_k|y_{1:N})$. En intégrant $p(x_k|y_{1:N})$ par rapport à x_{k+1} , on a les développements suivants [Sä13, Chap. 8] :

$$p(x_k|y_{1:N}) = \int p(x_k, x_{k+1}|y_{1:N})dx_{k+1} \quad (\text{B.9})$$

en utilisant le théorème de Bayes puis les propriétés de Markov du modèle,

$$p(x_k|y_{1:N}) = \int p(x_k|x_{k+1}, y_{1:N})p(x_{k+1}|y_{1:N})dx_{k+1} \quad (\text{B.10})$$

$$p(x_k|y_{1:N}) = \int p(x_k|x_{k+1}, y_{1:k})p(x_{k+1}|y_{1:N})dx_{k+1} \quad (\text{B.11})$$

en appliquant à nouveau le théorème de Bayes,

$$p(x_k|y_{1:N}) = \int \frac{p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k})}{p(x_{k+1}|y_{1:k})}p(x_{k+1}|y_{1:N})dx_{k+1} \quad (\text{B.12})$$

$$p(x_k|y_{1:N}) = p(x_k|y_{1:k}) \int \frac{p(x_{k+1}|x_k)p(x_{k+1}|y_{1:N})}{p(x_{k+1}|y_{1:k})}dx_{k+1}. \quad (\text{B.13})$$

où $p(x_k|y_{1:k})$ et $p(x_{k+1}|y_{1:k})$ sont les résultats des étapes de mise à jour et de prédiction du processus de filtrage.

B.2 Filtrage et lissage gaussiens

En faisant l'hypothèse que les densités de probabilité sont toutes des gaussiennes, on a la représentation d'état stochastique

$$x_{k+1} = f_d(x_k, \theta) + q_k \quad (\text{B.14})$$

$$y_k = h(x_k, \theta) + r_k. \quad (\text{B.15})$$

avec $q_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $r_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ les bruits de processus et de mesure (qui dépendent de la fréquence d'échantillonnage). Ce modèle peut être réécrit sous la forme

$$x_{k+1} \sim \mathcal{N}(f_d(x_k, \theta), Q) \quad (\text{B.16})$$

$$y_k \sim \mathcal{N}(h_d(x_k, \theta), R). \quad (\text{B.17})$$

La distribution de la variable d'état est supposée gaussienne, elle est donc complètement décrite par sa moyenne et sa covariance. L'objectif du lissage gaussien (*Gaussian smoothing*) est donc d'estimer la moyenne et la covariance de l'état pour tous les instants de temps $k \in [1, N]$. Les estimations de la distribution de l'état obtenues par le filtrage et le lissage sont respectivement notées $x_k \sim \mathcal{N}(m_k, P_k)$ et $x_k^s \sim \mathcal{N}(m_k^s, P_k^s)$. Le lissage gaussien est réalisé en deux étapes : le filtrage gaussien (*Gaussian filtering, forward pass*) et la passe en sens opposé (*backward pass*).

Filtrage gaussien Le filtrage se fait en deux étapes : l'étape de prédiction et l'étape de mise à jour. Ces deux étapes sont effectuées itérativement pour tous les échantillons de mesure. Dans l'étape de mise à jour la distribution estimée de l'état $x_k \sim \mathcal{N}(m_k, P_k)$ est calculée à partir de la distribution prédite $x_k^- \sim \mathcal{N}(m_k^-, P_k^-)$ et la mesure y_k . À l'étape de prédiction, la distribution de l'état $x_{k+1}^- \sim \mathcal{N}(m_{k+1}^-, P_{k+1}^-)$ est prédite à partir de la distribution x_k et des équations du modèle. Mise à jour :

$$y_k^- = \mathbb{E}[h(x_k^-)] \quad (\text{B.18})$$

$$S_k = \mathbb{E}[(h(x_k^-) - y_k^-)(h(x_k^-) - y_k^-)^\top] + R \quad (\text{B.19})$$

$$C_k = \mathbb{E}[(x_k^- - m_k^-)(h(x_k^-) - y_k^-)^\top] \quad (\text{B.20})$$

$$K_k = C_k S_k^{-1} \quad (\text{B.21})$$

$$m_k = m_k^- + K_k(y_k - y_k^-) \quad (\text{B.22})$$

$$P_k = P_k^- - K_k S_k K_k^\top. \quad (\text{B.23})$$

Prédiction :

$$m_{k+1}^- = \mathbb{E}[f_d(x_k)] \quad (\text{B.24})$$

$$P_{k+1}^- = \mathbb{E}[(f_d(x_k) - m_{k+1}^-)(f_d(x_k) - m_{k+1}^-)^\top] + Q. \quad (\text{B.25})$$

Lissage gaussien La passe en sens inverse nécessite de calculer

$$D_{k+1} = \mathbb{E}[(x_k - m_k)(f(x_k) - m_{k+1}^-)^\top] \quad (\text{B.26})$$

$$G_k = D_{k+1} (P_{k+1}^-)^{-1} \quad (\text{B.27})$$

$$m_k^s = m_k + G_k(m_{k+1}^s - m_{k+1}^-) \quad (\text{B.28})$$

$$P_k^s = P_k + G_k(P_{k+1}^s - P_{k+1}^-)G_k^\top \quad (\text{B.29})$$

Toutes les espérances sont faites sur la variable d'état, et sont utilisées pour calculer la moyenne de la sortie prédite y_k^- , la moyenne de l'état prédit m_{k+1}^- et les matrices de covariance et covariance croisée (*cross-covariance*)

$$S_k = \Sigma_{y_k y_k} \quad (\text{B.30})$$

$$C_k = \Sigma_{x_k^- y_k} \quad (\text{B.31})$$

$$P_k = \Sigma_{x_k x_k} \quad (\text{B.32})$$

$$P_{k+1}^- = \Sigma_{x_{k+1}^- x_{k+1}^-} \quad (\text{B.33})$$

$$D_{k+1} = \Sigma_{x_k x_{k+1}^-} \quad (\text{B.34})$$

B.3 Lissage de Rauch-Tung-Striebel unscented

La transformation unscented [JU04] s'appuie sur un ensemble de $2n + 1$ sigma-points pour approximer une distribution gaussienne. Ces sigma-points sont propagés au travers des équations du modèle non-linéaire pour estimer la distribution de la variable d'état prédite x_{k+1} et la distribution de la sortie y_k . La densité de probabilité d'une variable gaussienne x propagée au travers d'une fonction non-linéaire g est approximée par

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int g(x)p(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2n} w_i g(x_i). \quad (\text{B.35})$$

Les sigma-points x_i , $i = 0, \dots, 2n$ sont construits comme

$$x_i = \hat{x} + \xi_i L \quad (\text{B.36})$$

avec

$$LL^\top = P \quad (\text{B.37})$$

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \sqrt{\lambda + n} & i = 1, \dots, n \\ -\sqrt{\lambda + n} & i = n + 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{\lambda}{n+\lambda} & i = 0, \text{ for computation of mean terms} \\ \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) & i = 0, \text{ for computation of covariance terms} \\ \frac{1}{2(n+\lambda)} & i = 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \quad (\text{B.40})$$

Les coefficients α , β et κ sont des paramètres qui définissent l'emplacement d'échantillonnement des sigma-points.

B.4 Lissage de Rauch-Tung-Striebel cubature

Le lissage « cubature » [AH11] est un cas particulier du lissage unscented où $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\kappa = 0$, donc w_i et ξ_i des équations B.35 et B.36 sont calculés comme

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \sqrt{n} & i = 1, \dots, n \\ -\sqrt{n} & i = n + 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

$$w_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \frac{1}{2n} & i = 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

En utilisant la factorisation de Cholesky

$$L_{k|k-1}L_{k|k-1}^\top = P_{k|k-1}, \quad (\text{B.43})$$

les équations du lissage de Rauch-Tung-Striebel cubature (*Cubature Rauch-Tung-Striebel smoother*, *CRTS smoother*) s'écrivent (sous la forme *square-root* [VDMW01])

Forward pass

Mise à jour :

$$X_{k|k-1} = \begin{bmatrix} x_{k|k-1} + \sqrt{n}L_{k|k-1}, & x_{k|k-1} - \sqrt{n}L_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.44})$$

$$Y_{i,k} = h(X_{i,k|k-1}) \quad \forall i = 1, \dots, 2n \quad (\text{B.45})$$

$$y_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k} \quad (\text{B.46})$$

$$S_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_{i,k} Y_{i,k}^\top - y_k y_k^\top + R_k \quad (\text{B.47})$$

$$C_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k-1} Y_{i,k}^\top - x_{k|k-1} y_k^\top \quad (\text{B.48})$$

$$K_k = C_k S_k^{-1} \quad (\text{B.49})$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k(y_k - y_k^-) \quad (\text{B.50})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k S_k K_k^\top. \quad (\text{B.51})$$

Prédiction :

$$X_{k|k} = [x_{k|k} + \sqrt{n}L_{k|k}, \quad x_{k|k} - \sqrt{n}L_{k|k}] \quad (\text{B.52})$$

$$X_{i,k+1|k}^* = f_d(X_{i,k|k}) \quad \forall i = 1, \dots, 2n \quad (\text{B.53})$$

$$x_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k+1|k}^* \quad (\text{B.54})$$

$$P_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k+1|k}^* X_{i,k+1|k}^{*\top} - x_{k+1|k} x_{k+1|k}^\top + Q_k \quad (\text{B.55})$$

Également à calculer dans le cas du lissage,

$$D_{k+1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_{i,k|k} X_{i,k+1|k}^{*\top} - x_{k|k} x_{k+1|k}^\top \quad (\text{B.56})$$

$$G_k = D_{k+1} P_{k+1|k}^{-1} \quad (\text{B.57})$$

Backward pass

$$x_{k|N}^s = \hat{x}_{k|k} + G_k(\hat{x}_{k+1|T}^s - x_{k+1|k}^-) \quad (\text{B.58})$$

$$P_{k|N}^s = P_{k|k} + G_k(P_{k+1|T}^s - P_{k+1|k}^-) G_k^\top. \quad (\text{B.59})$$

C

Étape M de l'algorithme EM

Sommaire

C.1	Présentation de l'étape de maximisation (M)	169
C.2	Évaluation de la borne inférieure	170

C.1 Présentation de l'étape de maximisation (M)

Pour estimer les paramètres d'un modèle dynamique non-linéaire par l'algorithme espérance-maximisation, celui-ci est représenté sous forme stochastique (avec des bruits gaussiens et centrés),

$$x_{k+1} = f_d(x_k, u_k, \theta) + q_k \quad (\text{C.1})$$

$$y_k = h(x_k, u_k, \theta) + r_k \quad (\text{C.2})$$

avec $q_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $r_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ les bruits de processus et de mesure. L'étape M de l'algorithme EM consiste à optimiser le vecteur de paramètres θ ,

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} p(y_{1:N}|\theta)p(\theta). \quad (\text{C.3})$$

À partir de (2.118), puisque la fonction log est concave,

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} \ln p(\theta_0) + \ln p(y_{1:N}|\theta). \quad (\text{C.4})$$

Le premier terme est le logarithme naturel de la distribution a priori de θ (décrite par $\theta_0 \sim \mathcal{N}(\mu_{\theta_0}, \Sigma_{\theta_0})$), le second terme est la log-vraisemblance qui dépend implicitement de la variable latente qu'est l'état. Ce terme est donc évalué en utilisant la trajectoire estimée de l'état à la dernière étape E à partir des mesures $y_{1:N}$ et du vecteur de paramètres $\theta^{(j)}$. La log-vraisemblance est développée en intégrant par rapport à la trajectoire de l'état précédemment calculée et en

utilisant le théorème de Bayes :

$$\ln p(y_{1:N}|\theta) = \int \ln p(y_{1:N}|\theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.5)$$

$$= \int \ln \frac{p(x_{1:N}, y_{1:N}|\theta)}{p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta)} p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.6)$$

$$= \int \ln p(x_{1:N}, y_{1:N}|\theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \\ - \int \ln p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.7)$$

$$\triangleq \mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)}) - \mathcal{V}(\theta, \theta^{(j)}). \quad (C.8)$$

En considérant à nouveau (C.4) et, puisqu'ajouter une constante ne change pas le problème d'optimisation,

$$\theta^{\text{MAP}} = \arg \max_{\theta} \ln p(\theta_0) + \mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)}) - \mathcal{V}(\theta, \theta^{(j)}) + \mathcal{V}(\theta^{(j)}, \theta^{(j)}). \quad (C.9)$$

En développant les deux derniers termes,

$$-\mathcal{V}(\theta, \theta^{(j)}) + \mathcal{V}(\theta^{(j)}, \theta^{(j)}) = - \int \ln p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \\ + \int \ln p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.10)$$

$$= \int \ln \frac{p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)})}{p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta)} p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.11)$$

$$= D_{KL} \left(p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) \parallel p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta) \right) \quad (C.12)$$

$$\geq 0 \quad (C.13)$$

ce qui correspond à la KL-divergence, qui est positive ou nulle (ce qui peut se montrer en appliquant l'inégalité de Jensen).

L'idée derrière l'algorithme EM est alors de maximiser itérativement la borne inférieure

$$\theta^{(j+1)} = \arg \max_{\theta} \ln p(\theta_0) + \mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)}). \quad (C.14)$$

C.2 Évaluation de la borne inférieure

Le terme $\mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)})$ peut être développé par le théorème de Bayes,

$$\mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)}) = \int \ln p(x_{1:N}, y_{1:N}|\theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.15)$$

$$= \int \ln (p(y_{1:N}|x_{1:N}, \theta) p(x_{1:N}|\theta)) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.16)$$

$$= \int \ln p(y_{1:N}|x_{1:N}, \theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \\ + \int \ln p(x_{1:N}|\theta) p(x_{1:N}|y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{1:N} \quad (C.17)$$

et en utilisant à nouveau le théorème de Bayes et les propriétés de Markov du modèle, les deux termes dont sont pris le logarithme deviennent

$$p(y_{1:N}|x_{1:N}, \theta) = p(y_1, y_2, \dots, y_N|x_{1:N}, \theta) \quad (\text{C.18})$$

$$= p(y_N|y_{1:N-1}, x_{1:N}, \theta)p(y_{1:N-1}|x_{1:N}, \theta) \quad (\text{C.19})$$

$$= \prod_{k=1}^N p(y_k|x_k, \theta) \quad (\text{C.20})$$

$$p(x_{1:N}|\theta) = p(x_1, x_2, \dots, x_N|\theta) \quad (\text{C.21})$$

$$= p(x_N|x_{1:N-1}, \theta)p(x_{1:N-1}|\theta) \quad (\text{C.22})$$

$$= p(x_1|\theta) \prod_{k=1}^{N-1} p(x_{k+1}|x_k, \theta). \quad (\text{C.23})$$

On a alors,

$$\mathcal{Q}(\theta, \theta^{(j)}) = I_1(\theta, \theta^{(j)}) + I_2(\theta, \theta^{(j)}) + I_3(\theta, \theta^{(j)}) \quad (\text{C.24})$$

avec

$$I_1(\theta, \theta^{(j)}) = \int \ln p(x_1|\theta)p(x_1|y_{1:N}, \theta^{(j)})dx_1 \quad (\text{C.25})$$

$$I_2(\theta, \theta^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N-1} \int \ln p(x_{k+1}|x_k, \theta)p(x_{k:k+1}|y_{1:N}, \theta^{(j)})dx_{k:k+1} \quad (\text{C.26})$$

$$I_3(\theta, \theta^{(j)}) = \sum_{k=1}^N \int \ln p(y_k|x_k, \theta)p(x_k|y_{1:N}, \theta^{(j)})dx_k \quad (\text{C.27})$$

L'objectif est donc d'évaluer ces trois quantités. Toutes les densités de probabilité sont supposées gaussiennes, le logarithme naturel d'une variable aléatoire gaussienne multivariée de dimension n s'exprime

$$\ln p(x) = \ln \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \right) \quad (\text{C.28})$$

$$= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det \Sigma - \frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu). \quad (\text{C.29})$$

En rappelant (C.1) et en utilisant le fait que l'intégrale d'une gaussienne vaut 1,

$$I_1(\theta, \theta^{(j)}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det P_{\text{init}} - \frac{1}{2} \int (x_1 - x_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (x_1 - x_{\text{init}}) p(x_1 | y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_1 \quad (\text{C.30})$$

$$I_2(\theta, \theta^{(j)}) = -(N-1)n \ln 2\pi - (N-1) \ln \det Q - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \int (f_d(x_k, \theta) - x_{k+1})^\top Q^{-1} (f_d(x_k, \theta) - x_{k+1}) p(x_{k:k+1} | y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_{k:k+1} \quad (\text{C.31})$$

$$I_3(\theta, \theta^{(j)}) = -N \frac{q}{2} \ln 2\pi - N \frac{1}{2} \ln \det R - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int (h(x_k, \theta) - y_k)^\top R^{-1} (h(x_k, \theta) - y_k) p(x_k | y_{1:N}, \theta^{(j)}) dx_k \quad (\text{C.32})$$

où $x_{\text{init}} = x_1^-$ et $P_{\text{init}} = P_1^-$ sont la moyenne et la covariance de l'état initial possiblement fonctions de θ . En pratique, la distribution de l'état peut être approximée par le lissage CRTS présenté en annexe B, les intégrales peuvent alors être approximées en utilisant la relation (B.35). De plus, l'intégrale dans $I_1(\theta, \theta^{(j)})$ peut être directement évaluée, si P_{init} est diagonale,

$$\mathbb{E} \left[(x_1^s - m_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (x_1^s - m_{\text{init}}) \right] \quad (\text{C.33})$$

$$= \mathbb{E} \left[(x_1^s - m_1^s + m_1^s - m_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (x_1^s - m_1^s + m_1^s - m_{\text{init}}) \right] \quad (\text{C.34})$$

$$= \mathbb{E} \left[(x_1^s - m_1^s)^\top P_{\text{init}}^{-1} (x_1^s - m_1^s) + (m_1^s - m_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (m_1^s - m_{\text{init}}) \right] \quad (\text{C.35})$$

$$= \text{tr}(P_{\text{init}}^{-1} P_1^s) + (m_1^s - m_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (m_1^s - m_{\text{init}}) \quad (\text{C.36})$$

Pour approximer l'intégrale dans $I_2(\theta, \theta^{(j)})$, un ensemble de sigma-points

$$\{(\tilde{m}_{k+1,i}, \tilde{m}_{k,i}), i = 1, \dots, 4n\} \quad (\text{C.37})$$

est échantillonné depuis la distribution de probabilité

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^s \\ x_k^s \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} m_{k+1}^s \\ m_k^s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{k+1}^s & P_{k+1}^s G_k^\top \\ G_k P_{k+1}^s & P_{k-1}^s \end{bmatrix} \right). \quad (\text{C.38})$$

Le terme intégral est alors approximé

$$\mathbb{E} \left[(f_d(x_k^s, \theta) - x_{k+1}^s)^\top Q^{-1} (f_d(x_k^s, \theta) - x_{k+1}^s) \right] \quad (\text{C.39})$$

$$= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{4n} (f_d(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - \tilde{m}_{k+1,i})^\top Q^{-1} (f_d(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - \tilde{m}_{k+1,i}) \quad (\text{C.40})$$

De façon similaire, pour approximer l'intégrale dans $I_3(\theta, \theta^{(j)})$, un ensemble de sigma-points

$$\{\tilde{m}_{k,i}, i = 1, \dots, 2n\} \quad (\text{C.41})$$

est échantillonné depuis la distribution de probabilité

$$x_k^s \sim \mathcal{N}(m_k^s, P_k^s) \quad (\text{C.42})$$

et l'intégrale est approximée par

$$\mathbb{E} \left[(h(x_k^s, \theta) - y_k)^\top R^{-1} (h(x_k^s, \theta) - y_k) \right] \quad (\text{C.43})$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (h(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - y_k)^\top R^{-1} (h(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - y_k) \quad (\text{C.44})$$

Finalement, en réécrivant (C.14), l'étape M consiste à maximiser la borne inférieure

$$\begin{aligned} \theta^{(j+1)} = & \arg \max_{\theta} -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det \Sigma_{\theta_0} - \frac{1}{2} (\theta - \mu_{\theta_0})^\top \Sigma_{\theta_0} (\theta - \mu_{\theta_0}) \\ & - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \det P_{\text{init}} \\ & - \frac{1}{2} \left(\text{tr}(P_{\text{init}} P_1^s) + (m_1^s - m_{\text{init}})^\top P_{\text{init}}^{-1} (m_1^s - m_{\text{init}}) \right) \\ & - (N-1)n \ln 2\pi - (N-1) \ln \det Q \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^{4n} (f_d(\tilde{m}_{k,i}^s, \theta) - \tilde{m}_{k+1,i}^s)^\top Q^{-1} (f_d(\tilde{m}_{k,i}^s, \theta) - \tilde{m}_{k+1,i}^s) \\ & - N \frac{q}{2} \ln 2\pi - N \frac{1}{2} \ln \det R \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (h(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - y_k)^\top R^{-1} (h(\tilde{m}_{k,i}, \theta) - y_k), \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

où les sigma-points $\tilde{m}_{k+1,i}$, $\tilde{m}_{k,i}$ and $\tilde{m}_{k,i}^s$ sont échantillonnés depuis les distributions (C.38) et (C.42) d'après la loi de cubature (annexe B). Selon quelles quantités et quelles fonctions dépendent du vecteur de paramètres θ , certains termes dans (C.45) peuvent être omis puisqu'ils sont constants.